椭圆型方程差分方法

〔苏〕 A. A. 萨马尔斯基　B. Б. 安德烈耶夫 著

科学出版社

内 容 简 介

近年来，在偏微分方程数值解法的研究方面取得较大的进展．本书是叙述椭圆型方程差分方法理论的较新较系统的著作．书中介绍了构造几个典型数学物理问题的差分格式的方法，讨论了守恒方法、变分差分方法和泛函逼近方法等．本书自成系统，易读易懂，不论对计算数学理论研究人员还是对实际计算工作者都有重要的参考价值．

А. А. Самарский В. Б. Андреев
РАЗНОСТНЫЕ МЕТОДЫ ДЛЯ
ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ
ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
Москва 1976

椭圆型方程差分方法

〔苏〕 A. A. 萨马尔斯基
B. Б. 安德烈耶夫 著

武汉大学计算数学教研室 译
责任编辑 向安全 林鹏
科 学 出 版 社 出 版
北京朝阳门内大街137号
中国科学院印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1984年 9月第 一 版　　开本：787×1092 1/32
1984年 9月第一次印刷　　印张：11 3/4
印数：0001—9,750　　字数：268,000

统一书号：13031・2678
本社书号：3682・13—1

定价： 1.85 元

译 者 前 言

本书主要论述了椭圆型偏微分方程近似解的差分格式理论.

书中叙述了构造典型数学物理问题差分格式的各种方法,研究均衡方法,变分差分方法,近似泛函法,以及用解函数类中的逼近来提高逼近误差阶的方法等等. 可供综合性大学数学系高年级学生、研究生以及有关科学工作者使用.

本书第一章至第五章,分别由许嘉谟、胡泽民、李茂祥、费浦生、康立山等同志翻译,第六章及附录由雷晋干同志翻译.

武汉大学计算数学教研室

序

各种物理性质的许多稳定过程都归结为椭圆型偏微分方程．诸如定常热传导和扩散问题，导体中电流分布问题，静电学和静磁学问题，弹性理论和渗流理论问题等等．

椭圆型方程边值问题的精确解只有在特殊情况下才能得到．因此必须善于近似地求解这些问题．

有限差分法是解椭圆型方程的通用而有效的方法，本书就是论述这种方法的．

用差分方法解微分方程的过程有两个基本步骤：

1）第一步——将微分方程及附加条件（例如边界条件）用一组网格方程来代替(建立差分格式)；

2）第二步——求解所得的网格(差分)方程组．

本书仅讨论与差分格式的建立及其分析有关的问题．逼近椭圆型方程的差分方程的解法(直接法和迭代法)将在另一书中讨论．

本书重点是对典型数学物理问题的方程及附加条件作差分逼近．我们仅限于研究相应于二阶及四阶方程和方程组的问题，特别是在它们之中的有直接实际应用价值的问题．因此我们认为，援引各种数学物理问题的提法(第一章)，并附上方程和边界条的推导是适宜的．

我们指出，椭圆型方程的差分逼近，可以用于建立与抛物型及双曲型方程有关的非定常数学物理问题的差分格式．

为叙述方便，本书主要研究两个自变量方程的差分格式．当进一步研究三维的情况时，不会引起任何原则性的困难，只

不过公式更复杂而已.

在建立差分格式时，总是应当注意到求解得到的差分方程组所需的计算量. 所以我们仅研究能保证二阶(或四阶)精确度的具有最小模式的最简单格式. 而且在实际中广泛应用的正是这些类型的格式.

在建立差分格式时，我们要关心的不仅是从逼近误差观点使它们能很好地逼近原来的微分方程，而且使它们在网格函数空间中能够模拟原问题的基本特性(例如自共轭性,椭圆性等等). 本书对此问题将给予应有的重视.

目前已有很多建立椭圆型方程差分逼近的方法. 在本书范围内,要详细叙述一般情形下的这些方法是不可能的.

我们以最简单的一维问题为例子来说明构造差分格式的各种方法. 这样做可以突出各种方法的建设性的思想，而不过多地叙述在讨论更一般方程时所出现的非常复杂的技术性细节.

差分格式的好坏首先取决于它的精度. 本书对差分格式的研究基于对逼近误差及稳定性的细致分析，因为正是这两个特征决定着差分格式的精确度.

差分格式稳定性的研究，归结为对差分边值问题的解作出先验估计. 对于椭圆型方程的差分格式，已有很多不同的先验估计，它们在各种不同程度上模仿了微分方程的先验估计.

本书中的先验估计，在很大程度上具有例证的特点. 对书中建立的差分格式没有一一进行先验估计，但按第三、五、六章中所讲的方法,可以得到这些估计.

在第三章中非常详尽地研究了各种坐标系中泊松方程的差分格式.

第四章讨论二阶椭圆型方程基本边值问题的差分格式

(含有或者不含有混合导数的情况，高阶的以及非均匀网格上的格式等等)，弹性理论方程组以及四阶方程的差分格式.

本章还详细研究了二阶和四阶方程的各种连接条件和边界条件的逼近.

第五章介绍差分格式理论中最基本的数学工具（差分格林公式，差分算子的特征值问题，网格嵌入定理等等)，这在第六章中用能量不等式方法求某些先验估计时要用到.

本书所讲的构造差分格式的方法，也可用于非线性方程的差分逼近. 但本书不讨论非线性格式，因为这要花相当大的精力去寻求先验估计，在本书中这样做是不适宜的.

本书是作者以莫斯科大学数学力学系、物理系、计算数学和自控系所用的讲义为基础而写成的. 本书可能有较多的读者，并可作为研究数学物理方程差分解法的教材. 在叙述方面具有系统性和初等性，不要求读者具有差分格式理论方面的预备知识. 应该指出，本书同 A. A. 萨马尔斯基著的《差分格式引论》(科学出版社，莫斯科，1971 年）在方法上和思想上都是相近的.

作者感谢 И. Г. 别鲁茜娜在整理手稿时的帮助.

A. A. 萨马尔斯基
B. Б. 安德烈耶夫

目　录

第一章　引　论

§1. 导出椭圆型方程的科学技术问题实例

1. 定常热传导和扩散问题. 各种物理性质的定常（即不随时间变化）过程，可由椭圆型方程来描述，在最简单的情况下（均匀介质和无源）由拉普拉斯方程描述. 例如有热传导、扩散问题，静电学、静磁学问题，有势流问题等等.

我们考察三维空间 $x=(x_1, x_2, x_3)$ 中由曲面 Γ 所界的某体积 G 内的定常热分布. 热迁移（或热传导）过程由傅里叶定律确定：热流密度向量 $\boldsymbol{W}$ 正比于温度 $u=u(x)$ 的梯度，即

$$\boldsymbol{W}=-k\operatorname{grad}u, \tag{1}$$

其中 $k=k(x)$ 是热传导系数. 热流密度等于单位时间内穿过同温面单位面积的热量.

对于表面为 S 且全部位于 G 中的体积 V，我们写出热平衡方程. 假设体积 V 内有按密度 $f(x)$ 分布的热源，那么体积 dV 中所产生的热量就是 $f(x)dV$.

令 W_n 是向量 $\boldsymbol{W}$ 在表面 S 的外法线 $\boldsymbol{n}$ 上的投影，热平衡方程表示以下显见的事实：通过表面 S 的热流总和

$$\iint_S W_n dS$$

应等于体积 V 中所产生的热量

$$\iiint_V f(x)dV,$$

亦即

$$\iint_S W_n dS = \iiint_V f(x) dV. \tag{2}$$

利用奥氏公式

$$\iint_S W_n dS = \iiint_V \operatorname{div} \boldsymbol{W} dV$$

将平衡方程 (2) 改写成

$$\iiint_V (\operatorname{div} \boldsymbol{W} - f(x)) dV = 0. \tag{2'}$$

如果 $f(x)$ 和 $\operatorname{div} \boldsymbol{W}$ 是点 $x = (x_1, x_2, x_3)$ 的连续函数，则由体积 V 的任意性，从 (2′) 可得

$$\operatorname{div} \boldsymbol{W} = f(x). \tag{3}$$

将热流向量表示式 (1) 代入上式，我们得到定常温度 $u = u(x)$ 的方程

$$Lu = \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) = -f(x) \tag{4}$$

或其展开的形式

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(k \frac{\partial u}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(k \frac{\partial u}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(k \frac{\partial u}{\partial x_3}\right) = -f(x_1, x_2, x_3). \tag{4'}$$

系数 k 是点 $x = (x_1, x_2, x_3)$ 的函数:

$$k = k(x) = k(x_1, x_2, x_3).$$

在均匀介质情况下，热传导系数不依赖于点 x，$k = \text{const}$，定常温度分布 $u = u(x)$ 就由泊松方程来描述:

$$\Delta u = -\bar{f}(x), \quad \bar{f} = f/k.$$

为方便起见，右边仍记为 $f(x)$，于是

$$\Delta u = -f(x), \tag{5}$$

或

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = -f(x). \tag{5'}$$

如果无热源,即 $f(x)=0$, 则对定常温度 $u=u(x)$, 可得齐次方程

$$\operatorname{div}(k\operatorname{grad}u)=0,$$

(或者在 $k=\text{const}$ 情况下为拉普拉斯方程 $\Delta u=0$.)

热传导方程 (4) 是在热迁移过程为各向同性的假定下得到的. 如果热传导系数依赖于方向,因而是一个张量(各向异性介质),则代替 (4) 的就是方程

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_{\alpha\beta}\frac{\partial u}{\partial x_\beta}\right)=-f(x). \tag{6}$$

如果 $\alpha\neq\beta$ 时 $k_{\alpha\beta}\equiv 0$, 则方程的形式为

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(k_{11}\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(k_{22}\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)+\frac{\partial}{\partial x_3}\left(k_{33}\frac{\partial u}{\partial x_3}\right)$$
$$=-f(x).$$

方程 (4) 在区域 G 的所有内点成立. 在它的边界 Γ 上要给出附加条件.

通常就是下面的几个条件之一:

1) 当 $x\in\Gamma$ 时,温度是给定的: $u=g(x)$;

2) 当 $x\in\Gamma$ 时,热流量是给定的: $k\dfrac{\partial u}{\partial n}=g(x)$;

3) 按牛顿定律,热交换是给定的: $k\dfrac{\partial u}{\partial n}=\kappa u+g(x)$,

$x\in\Gamma$, 其中 $\kappa=\kappa(x)>0$.

相应于这些条件,我们得到三个基本边值问题:

1) 第一边值问题,或狄利克雷问题:由条件 $Lu=-f(x)$

当 $x\in G, u=g(x)$ 当 $x\in\Gamma$,

求出闭区域 $G+\Gamma$ 上的连续函数 $u(x)$;

2) 第二边值问题,或诺依曼问题:

$$Lu=-f(x) \text{ 当 } x\in G,\quad k\frac{\partial u}{\partial n}=g(x) \text{ 当 } x\in\Gamma;$$

3）第三边值问题：

$$Lu = -f(x) \text{ 当 } x \in G, \quad k\frac{\partial u}{\partial n} = \kappa u + g(x) \text{ 当 } x \in \Gamma.$$

我们指出，为使诺依曼问题可解，必须满足条件

$$\int_\Gamma g(x)d\sigma + \int_G f(x)dx = 0, \tag{7}$$

在齐次方程的情况（$f \equiv 0$）下，式(7)就成为

$$\int_\Gamma g(x)d\sigma = 0. \tag{8}$$

这个条件意味着流入区域G的热量应等于流出的热量（否则过程将带有不定常的特征）.

物质扩散过程在很多方面类似于热传导过程．描述扩散现象时，与热传导的基本定律相类似的，就是涅恩斯特定律，据此，物质流量密度向量 $\boldsymbol{W}$ 正比于浓度 $u = u(x)$ 的梯度：

$$\boldsymbol{W} = -D \operatorname{grad} u,$$

其中 $D=D(x)$ 是扩散系数．把此式代入方程(3)，当 $f(x)=0$（表示没有扩散物质的源），就得到扩散方程

$$\operatorname{div}(D \operatorname{grad} u) = 0,$$

在均匀介质（$D = \text{const}$）时，它变成拉普拉斯方程 $\Delta u = 0$.

如果扩散发生在以速度 $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$ 运动的介质中，则对定常浓度分布 $u = u(x)$，扩散方程为

$$\operatorname{div}(D \operatorname{grad} u) - \operatorname{div}(\boldsymbol{v} u) = 0. \tag{9}$$

或者如果 $\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0$（介质是不可压缩的），则有

$$\operatorname{div}(D \operatorname{grad} u) - v_1\frac{\partial u}{\partial x_1} - v_2\frac{\partial u}{\partial x_2} - v_3\frac{\partial u}{\partial x_3} = 0.$$

事实上，如果介质是运动的，则物质流的总和是由等于 $-D \operatorname{grad} u$ 的扩散流和等于 $u\boldsymbol{v}$ 的迁移流（传播流）所构成，即总的流是

$$\boldsymbol{W} = -D \operatorname{grad} u + u\boldsymbol{v}.$$

现在我们只要把此式代入(3)式中,并令 $f=0$(无源)即可.在扩散过程中可能伴有分解反应或物质增生,这相当于出现汇或源.如果这些源(汇)的密度例如是正比于浓度,则代替(9)式的就是方程

$$\operatorname{div}(D\operatorname{grad}u)-(\boldsymbol{v}\operatorname{grad}u)+\beta u=0 \tag{10}$$

其中 β 是比例系数[当 $\beta>0$ 有源(物质增生),当 $\beta<0$ 有汇].

注 1. 其他问题也可以导出上述方程. 例如,考察绝缘介质中的静电场问题. 它可由马克斯威尔方程描述:

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{E}=0,\ \operatorname{div}\boldsymbol{D}=4\pi\rho,\ \boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E},$$

其中 $\boldsymbol{E}$ 是电场强度向量,$\boldsymbol{D}$ 是电感应向量,$\varepsilon=\varepsilon(x)$ 是介质的介电系数,$\rho=\rho(x)$ 是在点 $x=(x_1, x_2, x_3)$ 处电荷的体密度. 由方程 $\operatorname{rot}\boldsymbol{E}=0$ 可知,$\boldsymbol{E}$ 是有势向量,可表成

$$\boldsymbol{E}=-\operatorname{grad}u,$$

其中 $u=u(x)$ 是电场的势. 将 $\boldsymbol{E}=-\operatorname{grad}u$ 代入方程 $\operatorname{div}\varepsilon\boldsymbol{E}=4\pi\rho$,得

$$\operatorname{div}(\varepsilon\operatorname{grad}u)=-4\pi\rho.$$

如果介质是均匀的($\varepsilon=\text{const}$),则

$$\Delta u=-4\pi\rho/\varepsilon;$$

在真空中($\varepsilon=1$)有 $\Delta u=-4\pi\rho$.

如果问题是定常的,则由马克斯威尔方程,对于磁场强度向量可得(静磁学方程)

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{H}=0,\ \operatorname{div}\boldsymbol{B}=0,\ \boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}.$$

同静电学类似,引入磁场势 u,它在均匀介质($\mu=\text{const}$)中满足拉普拉斯方程 $\Delta u=0$,并且 $\boldsymbol{H}=-\operatorname{grad}u$.

注 2. 定常不可压流体流动的速度势 φ 也满足拉普拉斯方程 $\Delta\varphi=0$,且速度 $\boldsymbol{v}=\operatorname{grad}\varphi$.

如果方程(4)的解不依赖于 x_3(显然,这只有在 $f=f(x_1,$

x_2)，$k = k(x_1, x_2)$，边界条件不依赖于 x_3，以及特殊类型的区域情况下才有可能)，则得到确定 $u = u(x_1, x_2)$ 的二维方程

$$Lu = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(k(x_1, x_2)\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(k(x_1, x_2)\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)$$
$$= -f(x_1, x_2).$$

例如这可能在下述情况下成立，即区域为沿 x_3 轴的母线所围成的无限柱体，并且方程的系数和右端项以及边界条件等一切已知量沿母线都不变化。这时，问题可在平行于平面（x_1，x_2）的任一柱体截面上来研究。

以后，为了叙述方便，我们仅考虑二维问题。转到三维椭圆问题不会发生原则性的困难，照例只是计算和公式复杂些而已。

2. 在导体中定常电流密度分布问题． 定常电磁场的分布问题导至椭圆型方程．这些问题可由马克斯威尔方程组来描述，在定常情况其形式为

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H} = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}, \quad \mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} = 0,$$
$$\mathrm{div}\,\mu\boldsymbol{H} = 0, \quad \mathrm{div}\,\varepsilon\boldsymbol{E} = 4\pi\rho, \tag{11}$$

其中 $\boldsymbol{E}$ 是电场强度向量，$\boldsymbol{H}$ 是磁场强度向量，$\boldsymbol{j}$ 是电流的体密度向量，ρ 是电荷的体密度，μ 是导磁率，ε 是导电率．

在介质为各向异性和非均匀的一般情况下，ε 和 μ 是依赖于空间点 $x = (x_1, x_2, x_3)$ 的张量．如果介质是各向同性的，则 ε 和 μ 是 x 的标量函数．在介质为各向同性和均匀的情况下，ε 和 μ 是常量：$\varepsilon = \mathrm{const} > 0$，$\mu = \mathrm{const} > 0$．在电介质中，可认为 $\mu = 1$，在导体中 $\varepsilon = 1$，在真空中 $\varepsilon = \mu = 1$．

在一般情况下，方程 (11) 中的 $\boldsymbol{j}$ 要用 $\boldsymbol{j} + \boldsymbol{j}^{(e)}$ 代替，其

中 $\boldsymbol{j}^{(e)}$ 是由另外的电动势所产生的电流体密度向量. 在这里我们假定 $\boldsymbol{j}^{(e)}=0$，如果介质是非传导的,则 $\boldsymbol{j}=0$. 静磁学方程 ($\operatorname{rot}\boldsymbol{H}=0$, $\operatorname{div}\mu\boldsymbol{H}=0$) 在非传导的介质中也成立.

以上所提到的条件 $\operatorname{rot}\boldsymbol{E}=0$，意味着向量 $\boldsymbol{E}$ 是有势的，而条件 $\operatorname{div}\boldsymbol{H}=0$ (在 $\mu=\text{const}$ 时成立)，意味着 $\boldsymbol{H}$ 是管量场，即存在向量势 $\boldsymbol{A}$，使得 $\boldsymbol{H}=\operatorname{rot}\boldsymbol{A}$，$\operatorname{div}\boldsymbol{A}=0$. 向量 $\boldsymbol{A}$ 满足泊松方程 $\Delta\boldsymbol{A}=(-4\pi/c)\boldsymbol{j}$. 事实上，(11) 的第一个方程给出

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{H}=\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{A}=\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{A}-\Delta\boldsymbol{A}=-\Delta\boldsymbol{A}=(4\pi/c)\boldsymbol{j}.$$

由于研究导体中定常电流的分布而产生了一些有意义的问题,从马克斯威尔方程 (11)，得到电荷守恒律

$$\operatorname{div}\boldsymbol{j}=0,$$

电场的有势性条件，即

$$\boldsymbol{E}=-\operatorname{grad}u, \tag{12}$$

应该与上述守恒条件列在一起. 电流密度向量 $\boldsymbol{j}$ 和电场强度之间有联系，这种联系表现为**欧姆定律**

$$\boldsymbol{j}=\sigma\boldsymbol{E}, \tag{13}$$

其中 σ 是导电系数,如果介质的传导性不依赖于方向(传导是各向同性的)，它是 $x=(x_1, x_2, x_3)$ 的标量函数;反之，σ 是张量. 由式 (12), (13) 得 $\boldsymbol{j}=-\sigma\operatorname{grad}u$. 再由式 $\operatorname{div}\boldsymbol{j}=0$，我们得到势函数的方程: $\operatorname{div}(\sigma\operatorname{grad}u)=0$，它可以写成如下的展开形式:

$$\sum_{i,j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sigma_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)=0, \text{在各向异性介质中,}$$

$$\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sigma\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)=0, \text{在各向同性介质中,}$$

$$\Delta u=\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}=0, \text{在均匀且各向同性介质中.}$$

在可传导的曲面上，电场向量的切向分量为零，这等价于势函数是常数： $u = \text{const}$（第一类边界条件）．特别在接地的理想可传导曲面上 $u \equiv 0$．在与电介质相连的导体边界上，电流密度的法向分量 $j_n = -\sigma \frac{\partial u}{\partial n}$ 为零，即

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{（第二类边界条件）}.$$

在研究液体和气体在磁流体管中流动，以及在研究强磁场中不平衡的等离子体的性态时，会遇到有界区域中电动力学的定常问题，它们的特性就是广义欧姆定律，此定律不仅表示向量 $\boldsymbol{j}$ 对于 $\boldsymbol{E}$，而且表示向量 $\boldsymbol{j}$ 对于 $\boldsymbol{H}$ 的依赖关系．首先必须指出，在以速度 $\boldsymbol{v}$ 运动的介质中，欧姆定律（13）的形式为

$$\boldsymbol{j} = \sigma(\boldsymbol{E} + [\boldsymbol{vH}]). \tag{14}$$

如果介质以速度 $\boldsymbol{v}$ 运动，并考虑到所谓霍尔效应，则广义欧姆定律为

$$\boldsymbol{j} + [\boldsymbol{j\Omega}] = \sigma(\boldsymbol{E} + [\boldsymbol{vH}]), \quad \boldsymbol{\Omega} = \beta \frac{\boldsymbol{H}}{|\boldsymbol{H}|}, \tag{15}$$

其中 β 是霍尔参数，$\sigma > 0$ 是导电系数．

如果霍尔参数 $\beta = 0$，则关于 j 的这个方程变成运动介质中通常的欧姆定律．

假若位移电流和感应磁场都小得可忽略，这就允许将磁场看成是不变的和给定的．

导电系数 σ，霍尔参数 β 及介质速度 $\boldsymbol{v}$ 的空间分布都将认为是给定的．在一般情况下，这些量可从求解另外的方程而得到，例如磁气动方程，电子能量守恒定律，等等．

以下仅限于研究二维问题，假定向量 $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{v}$ 都与坐标 x_3 无关，并且都位于同一平面 (x_1, x_2) 上，因此

$\boldsymbol{j}=(j_1, j_2, 0)$,　$\boldsymbol{E}=(E_1, E_2, 0)$,　$\boldsymbol{v}=(v_1, v_2, 0)$,
而磁场 $\boldsymbol{H}$ 和向量 $\boldsymbol{\Omega}$ 垂直于平面 (x_1, x_2):

$$\boldsymbol{H}=(0, 0, H), \quad \boldsymbol{\Omega}=(0, 0, \Omega).$$

所有这些函数 $j_1, j_2, E_1, E_2, v_1, v_2, H, \Omega$ 都只依赖于 x_1 和 x_2. 这时方程 $\operatorname{rot}\boldsymbol{E}=0$, $\operatorname{div}\boldsymbol{j}=0$ 及欧姆定律(15)有如下形式:

$$\frac{\partial E_1}{\partial x_2}-\frac{\partial E_2}{\partial x_1}=0, \quad \frac{\partial j_1}{\partial x_1}+\frac{\partial j_2}{\partial x_2}=0,$$
$$j_1+\Omega j_2=\sigma(E_1+v_2H),$$
$$j_2-\Omega j_1=\sigma(E_2-v_1H). \tag{16}$$

这里写出了对四个未知函数 E_1, E_2, j_1, j_2 的四个方程; 函数 $v_1, v_2, H, \Omega, \sigma$ 是给定的.

我们在边界为 Γ 的有限区域 G 中讨论这些方程. 在曲线 Γ 上需要给出边界条件,考虑如下的边界条件:

1) 穿过边界的电流密度向量的法向分量是给定的,

$$j_n=g(s), \quad 在\ \Gamma\ 上,$$

其中 $g(s)$ 是弧长 s 的给定函数, 弧长由曲线 Γ 上的某一点算起; j_n 是向量 $\boldsymbol{j}$ 在曲线 Γ 外法线 n 上的投影.

$g(s)\equiv 0$ 的情况相应于理想电介质, $g(s)\not\equiv 0$ 的情况相应于《理想分隔》电极.

2) 另一类边界条件是要求电场向量的切向分量 E_τ 在两种介质的分界面上连续. 这样,沿着连续理想导体电极,电场的切向分量为零,

$$E_\tau=0.$$

在一般情况下, 边界 Γ 可分成有限段 γ_k, 在各段给出不同类型的边界条件.

下面我们假定 G 是矩形 $ABCD$. 边界 Γ 是理想电介质壁,但要除掉两个电极 $ab\subset AB$ 和 $cd\subset CD$, 这两个电极或

者是理想分隔（$j_n \neq 0$），或者是理想导体（$E_\tau = 0$）。由方程(16)可以引进标量函数 $\varphi(x_1, x_2)$，并令 $\boldsymbol{E} = -\mathrm{grad}\,\varphi$ 或

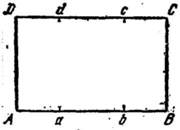


图 1

者 $E_1 = -\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}$, $E_2 = -\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}$. 同样，可引进向量函数（向量势）$\boldsymbol{\psi} = (0, 0, \psi(x_1, x_2))$，并令

$$\boldsymbol{j} = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{\psi} \text{ 或者 } j_1 = \frac{\partial\psi}{\partial x_2},\ j_2 = -\frac{\partial\psi}{\partial x_1}.$$

将这些表示式代入欧姆定律(15)，就得到

$$\begin{aligned} &\Omega\frac{\partial\psi}{\partial x_1} - \frac{\partial\psi}{\partial x_2} - \sigma\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} = -\sigma v_2 H, \\ &\frac{\partial\psi}{\partial x_1} + \Omega\frac{\partial\psi}{\partial x_2} - \sigma\frac{\partial\varphi}{\partial x_2} = \sigma v_1 H. \end{aligned} \tag{17}$$

边界条件 $j_n = g(s)$ 成为

$$\frac{\partial\psi}{\partial s} = g(s),$$

它等价于条件

$$\psi(x)|_{x\in\Gamma} = \nu(s) = \int g(s)ds. \tag{18}$$

由 $E_\tau = 0$ 得 $\partial\varphi/\partial s = 0$，由此得

$$\varphi(x)|_{x\in\Gamma} = \mathrm{const}.$$

不难从函数 ψ 和 φ 的两个一阶方程组用消去 φ 的办法得到 ψ 的一个二阶方程。

$$L\psi = -\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{\sigma}\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\right) - \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{1}{\sigma}\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\right) - \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\Omega}{\sigma}\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\right)$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\Omega}{\sigma}\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\right) = f,$$

$$-f = \frac{\partial}{\partial x_1}(v_1 H) + \frac{\partial}{\partial x_2}(v_2 H) = \operatorname{div}(H\boldsymbol{v}).$$

为此，只要将方程(17)乘上 $1/\sigma$，第一个方程对 x_2 微分，第二个方程对 x_1 微分，再从第一个等式减去第二个等式即可.

边界条件 $\psi(s) = \nu(s)$ 仍然有效，而条件 $\varphi(s) = \text{const}$ 则由(17)，(18)而变成斜微商条件

$$\frac{\partial\psi}{\partial n} + \Omega\frac{\partial\psi}{\partial s} = \sigma v_n H. \tag{19}$$

事实上，令 $\boldsymbol{n} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$ 是曲线 Γ 的外法线单位向量，$\boldsymbol{\tau} = (-\sin\alpha, \cos\alpha)$ 是切线单位向量. 首先注意到，$v_n = v_1\cos\alpha + v_2\sin\alpha$，

$$\frac{\partial\psi}{\partial n} = \frac{\partial\psi}{\partial x_1}\cos\alpha + \frac{\partial\psi}{\partial x_2}\sin\alpha,$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial s} = -\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\sin\alpha + \frac{\partial\psi}{\partial x_2}\cos\alpha.$$

然后，用 $-\sin\alpha$ 乘方程(17)，$\cos\alpha$ 乘方程(18)，再将所得的两个方程相加，

$$\frac{\partial\psi}{\partial n} + \Omega\frac{\partial\psi}{\partial s} - \sigma\frac{\partial\varphi}{\partial s} = \sigma v_n H.$$

如果令 $\varphi(s) = \text{const}$ 或 $\partial\varphi/\partial s = 0$，由此就得到条件(19).

如果参数 σ 和 Ω 是常数，则方程 $L\psi = f$ 变成泊松方程

$$\Delta\psi = -\sigma f.$$

于是就有如下的边值问题：

$$L\psi = f \text{ 当 } x = (x_1, x_2) \in G,$$

$$\psi(s) = \nu(s) \text{ 在 } \gamma_1 \text{ 上},$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n}+\Omega\frac{\partial\psi}{\partial s}=\sigma v_n H \text{ 在 } \gamma_2 \text{ 上} \tag{19'}$$

其中 $\gamma_1+\gamma_2=\Gamma$.

我们来考察满足齐次边界条件(18)或(19),或(19′)的函数ψ所组成的函数类Ψ.

上面所定义的算子L在函数ψ的函数类Ψ上是正的，即

$$(\psi,\ L\psi)=\iint\psi L\psi dx_1dx_2>0,$$

而一般说它是非自共轭的，$L\neq L^*$，即对Ψ中任意的ψ及$\bar{\Phi}$,

$$(\psi,L\bar{\Phi})\neq(L\psi,\bar{\Phi}).$$

但是我们注意到，如果没有霍尔电流，即$\Omega\equiv 0$，则算子，

$$\mathring{L}\psi=-\operatorname{div}\left(\frac{1}{\sigma}\operatorname{grad}\psi\right)$$

是自共轭的，$\mathring{L}=\mathring{L}^*$.

例如，我们来证明关系式$(\psi,\ L\psi)>0$的正确性．为此,利用格林公式，

$$\begin{aligned}(\psi,\ L\bar{\Phi})=&\iint_G\psi\left\{-\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{1}{\sigma}\left(\frac{\partial\bar{\Phi}}{\partial x_1}+\Omega\frac{\partial\bar{\Phi}}{\partial x_2}\right)\right.\\&\left.+\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{1}{\sigma}\left(\frac{\partial\bar{\Phi}}{\partial x_2}-\Omega\frac{\partial\bar{\phi}}{\partial x_1}\right)\right\}dx_1dx_2\\=&\iint_G\frac{1}{\sigma}\nabla\psi\nabla\bar{\Phi}dx_1dx_2\\&+\iint_G\frac{\Omega}{\sigma}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\frac{\partial\bar{\Phi}}{\partial x_2}-\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\frac{\partial\bar{\Phi}}{\partial x_1}\right)dx_1dx_2\\&+\oint_\Gamma\psi\frac{1}{\sigma}\left(\frac{\partial\bar{\Phi}}{\partial n}+\Omega\frac{\partial\bar{\Phi}}{\partial s}\right)ds.\end{aligned}\tag{20}$$

设沿边界Γ的积分号中的函数为

$$\psi\left(\frac{\partial\bar{\Phi}}{\partial n}+\Omega\frac{\partial\bar{\Phi}}{\partial s}\right)=F(s),$$

当 ϕ 和 $\bar{\phi}$ 满足条件 (18) 或 (19) 中的任一个，也就是 ϕ 和 $\bar{\phi}$ 属于类 Ψ 时，这个函数等于零．然后在公式(20)中令 $\bar{\phi}=\phi$，立刻得到

$$(\phi, L\phi)=\iint_G \frac{1}{\sigma}|\nabla\phi|^2 dx_1dx_2=(\phi, \mathring{L}\phi)>0.$$

由公式 (20) 也可看出，

$$(\phi, L\bar{\phi})=\iint_G \frac{1}{\sigma}\nabla\phi\nabla\bar{\phi}dx_1dx_2 + \iint_G \frac{\Omega}{\sigma}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_1}\frac{\partial\bar{\phi}}{\partial x_2}-\frac{\partial\phi}{\partial x_2}\frac{\partial\bar{\phi}}{\partial x_1}\right)dx_1dx_2,$$

$$(\bar{\phi}, L\phi)=\iint_G \frac{1}{\sigma}\nabla\phi\nabla\bar{\phi}dx_1dx_2 - \iint_G \frac{\Omega}{\sigma}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_1}\frac{\partial\bar{\phi}}{\partial x_2}-\frac{\partial\phi}{\partial x_2}\frac{\partial\bar{\phi}}{\partial x_1}\right)dx_1dx_2,$$

所以，仅当条件

$$\iint_G \frac{\Omega}{\sigma}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_1}\frac{\partial\bar{\phi}}{\partial x_2}-\frac{\partial\phi}{\partial x_2}\frac{\partial\bar{\phi}}{\partial x_1}\right)dx_1dx_2=0$$

满足时(当 $\Omega=0$ 时，这个条件满足)，$(\bar{\phi}, L\phi)=(L\bar{\phi}, \phi)$.

3. 弹性固体静力学． 在外力作用下固体会发生一定程度的变形，也就是说，形状和体积都会发生改变．令 $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, x_3)$ 是外力尚未作用前固体某一点的矢径，而 $\boldsymbol{x}'=(x_1', x_2', x_3')$ 是外力作用后这一点的矢径．可用向量 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}$ 来表示变形时点的位移，称为位移向量，它的分量为

$$u_i=x_i'-x_i, \quad i=1, 2, 3.$$

显然，给出物体每一点的位移向量，就足以描述物体的变形状态．

为了导出描述固体变形状态的方程 (假定处于平衡)，我们在物体中划出任意一块由表面 S 所界定的体积 V．写出作

用在体积 V 上所有的力的主向量为零这个条件．体积力主向量等于

$$\iiint_V \boldsymbol{F} dV,$$

其中 $\boldsymbol{F}=(F_1, F_2, F_3)$ 是作用在单位体积上的力．从 V 外通过表面 S 作用到该体积上的力的主向量等于

$$\iint_S \boldsymbol{f} dS,$$

其中 $\boldsymbol{f}=(f_1, f_2, f_3)$ 是作用在单位面积上的力．使体积力和表面力的主向量之和等于零，得到

$$\iiint_V \boldsymbol{F}\, dV + \iint_S \boldsymbol{f} dS = 0. \tag{21}$$

将这个关系式作一改变，按照奥氏公式，标量函数 f_i 的曲面积分

$$\iint_S f_i dS$$

可以表示成某向量 $\boldsymbol{\tau}_i$ 的散度的体积分，即

$$\iint_S f_i\, dS = \iiint_V \operatorname{div} \boldsymbol{\tau}_i\, dV, \tag{22}$$

其中 $\boldsymbol{\tau}_i=\{\tau_{i1}, \tau_{i2}, \tau_{i3}\}$．这时

$$f_i = \tau_{i1}\cos(\boldsymbol{n},x_1) + \tau_{i2}\cos(\boldsymbol{n},x_2) + \tau_{i3}\cos(\boldsymbol{n},x_3), \tag{23}$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 是 S 的外法线．将 (22) 代入 (21) 后，并考虑到对任意体积 V，(21) 式都是成立的，我们得到下面的方程组：

$$\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + F_i = 0, \quad i=1, 2, 3. \tag{24}$$

张量

$$\hat{T} = \begin{Vmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{Vmatrix}$$

称应力张量，而函数 τ_{ik} 称应力张量的分量.

我们来阐明应力张量分量的力学意义. 按定义，f_i 是作用在曲面 S 上的力 $\boldsymbol{f}$（单位面积上的作用力）在 x_i 轴上的投影. 在 S 上取一点，使此点的外法线沿 x_1 轴，由(23)式得到

$$f_i = \tau_{i1}.$$

因此 τ_{i1} 就是作用在单位面积上并垂直于 Ox_1 轴的力在 Ox_i 轴上的投影；更确切地说，τ_{11} 是这个力的法向分量，τ_{21} 和 τ_{31} 是切向分量. 在图 2 中标明了应力张量分量的力学意义.

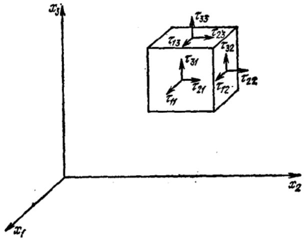


图 2

现在写出对于坐标轴的主矩等于零这个条件. 对轴 Ox_1 的力矩等于零，

$$\iiint\limits_V (x_2F_3 - x_3F_2)dV + \iint\limits_S (x_2f_3 - x_3f_2)dS = 0. \qquad (25)$$

由(23)式，有

$$\iint\limits_S (x_2f_3 - x_3f_2)dS = \iint\limits_S \Big\{(x_2\tau_{31} - x_3\tau_{21})\cos(\boldsymbol{n}, x_1) + (x_2\tau_{32} - x_3\tau_{22})\cos(\boldsymbol{n}, x_2) + (x_2\tau_{33} - x_3\tau_{23})\cos(\boldsymbol{n}, x_3)\Big\}dS,$$

或者按奥氏公式将后一积分作变换:

$$\iint_S (x_2f_3 - x_3f_2)dS = \iiint_V \mathrm{div}(x_2\boldsymbol{\tau}_3 - x_3\boldsymbol{\tau}_2)dV$$

$$= \iiint_V \left\{x_2\left(\frac{\partial\tau_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial\tau_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial\tau_{33}}{\partial x_3}\right)\right.$$

$$- x_3\left(\frac{\partial\tau_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial\tau_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial\tau_{23}}{\partial x_3}\right)$$

$$\left. + \tau_{32} - \tau_{23}\right\} dV.$$

将此式代入(25),并注意到(24),可得

$$\iiint_V (\tau_{32} - \tau_{23})dv = 0.$$

由于体积 V 的任意性,得 $\tau_{32} = \tau_{23}$. 类似地可得关系式 $\tau_{12}=\tau_{21}, \tau_{31} = \tau_{13}$.

我们已经证明了应力张量是对称的,因此方程组(24)仅包含6个未知函数.

为得到位移向量 $\boldsymbol{u}$ 的方程组,我们要引出变形张量,并建立应力张量分量与变形张量分量之间的联系.

当物体变形时,各点间的距离发生变化.我们考察任意两个相接近的点.令第一个点的矢径是 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$; 而第二个点是 $\boldsymbol{x} + \Delta\boldsymbol{x} = (x_1 + \Delta x_1,\ x_2 + \Delta x_2,\ x_3 + \Delta x_3)$. $\boldsymbol{x}$ 点的位移向量是 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = (u_1(\boldsymbol{x}),\ u_2(\boldsymbol{x}),\ u_3(\boldsymbol{x}))$, 而点 $\boldsymbol{x} + \Delta\boldsymbol{x}$ 的位移向量是

$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x} + \Delta\boldsymbol{x}) = (u_1(\boldsymbol{x} + \Delta\boldsymbol{x}),\ u_2(\boldsymbol{x} + \Delta\boldsymbol{x}),\ u_3(\boldsymbol{x} + \Delta\boldsymbol{x}))$.

向量 $\Delta\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x} + \Delta\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ 刻划了向量 $\Delta\boldsymbol{x}$ 位置的变化,并且有

$$\Delta u_i = \sum_{j=1}^{3} \Delta x_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + O(|\Delta\boldsymbol{x}|^2), \tag{26}$$

而向量 $\Delta\boldsymbol{x} + \Delta\boldsymbol{u}$ 刻划了上述各点在位移后互相间的距离.

计算向量 $\Delta \boldsymbol{x}+\Delta \boldsymbol{u}$ 的长度,

$$
\begin{aligned}
|\Delta \boldsymbol{x}+\Delta \boldsymbol{u}|^2 = & |\Delta \boldsymbol{x}|^2+2 \sum_{i=1}^3 \Delta x_i \Delta u_i+|\Delta \boldsymbol{u}|^2 \\
= & |\Delta \boldsymbol{x}|^2+\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \Delta x_i \Delta x_j \\
& +|\Delta \boldsymbol{u}|^2+O(|\Delta \boldsymbol{x}|^3).
\end{aligned}
$$

现在我们引进通常在几何线性弹性理论中所作的假定. 我们将认为所考察的物体是小变形,因此可以假定 $\partial u_i/\partial x_j \ll 1$. 根据这个假定,导数 $\partial u_i/\partial x_j$ 的平方项及乘积项与它的一次项相比可以忽略.

如果

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = & \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) \\
= & \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3}+\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right)=\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3}+\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)=0, \quad (27)
\end{aligned}
$$

则按精度 $O(|\Delta \boldsymbol{x}|^3+|\Delta \boldsymbol{u}|^2)$, 点 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{x}+\Delta \boldsymbol{x}$ 间的距离平方在位移后保持不变,即这时可以认为是没有变形的.

因此,在所作的假定下,条件 (27) 是没有变形而有位移,即刚性位移的条件.

我们将关系式 (26) 写成如下形式:

$$
\begin{aligned}
\Delta u_i = & \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 \Delta x_j\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \\
& +\frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 \Delta x_j\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}-\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)+O(|\Delta \boldsymbol{x}|^2), \\
& i=1,2,3.
\end{aligned}
$$

由此可见,在点 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{x}+\Delta \boldsymbol{x}$ 变形后,由向量 $\Delta \boldsymbol{u}$ 所刻划的向量 $\Delta \boldsymbol{x}$ 位置的变化,在精度 $O(|\Delta \boldsymbol{x}|^2)$ 的范围可以由刚体位移和对称张量

$$\hat{\varepsilon}=\left\|\begin{matrix}\varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13}\\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23}\\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33}\end{matrix}\right\|$$

所表示，其中

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right). \tag{28}$$

这个张量称为变形张量，而函数 $\varepsilon_{ij}(x)$ 称为变形张量的分量.

可以证明，变形张量的分量有如下的力学意义：ε_{ii} 是原先平行于 Ox_i 轴的线段的相对伸长；$2\varepsilon_{ij}(i\neq j)$ 表原先平行于 Ox_i，Ox_j 轴正方向的两个向量所夹直角的减缩.

广义虎克定律建立了应力和变形张量分量之间的关系：应力张量分量是变形张量分量的线性齐次函数，即

$$\tau_{ij}=\sum_{\alpha,\beta=1}^{3}C_{ij\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha\beta}\quad i,\ j=1,2,3.$$

四级张量 $C_{ij\alpha\beta}$ 称为弹模张量. 众所周知，它总是具有对称性：

$$C_{ij\alpha\beta}=C_{ji\alpha\beta}=C_{ij\beta\alpha}=C_{\alpha\beta ij},$$

即 81 个参数不同的仅 21 个.

在各向同性体的情况下，不同参数的数目减少到 2 个. 这时虎克定律的形式为

$$\begin{aligned}\tau_{ii}&=\lambda\sum_{j=1}^{3}\varepsilon_{jj}+2\mu\varepsilon_{ii},\quad i=1,2,3,\\ \tau_{ij}&=2\mu\varepsilon_{ij},\quad i\neq j,\quad i,j=1,2,3.\end{aligned} \tag{29}$$

将 (29) 代入 (24) 并考虑到 (28)，得到如下的以位移表示的弹性固体平衡方程组(拉梅方程组)：

$$\sum_{j=1}^{3}\left[\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\lambda\frac{\partial u_j}{\partial x_j}\right)+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right)\right]+F_i=0. \tag{30}$$

如果物体是均匀的，即如果拉梅系数 λ 和 μ 不依赖于 x，

则方程组 (30) 按向量形式可写成

$$\mu\Delta \boldsymbol{u} + (\lambda + \mu)\mathrm{grad}\ \mathrm{div}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{F} = 0.$$

此外，如果 $F_3 = 0$，$u_3 = 0$，而 F_1，F_2，u_1，u_2 都不依赖于 x_3，则得平面问题

$$\begin{aligned}(2\mu + \lambda)\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \mu\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + (\lambda + \mu)\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} + F_1 = 0,\\ (\lambda + \mu)\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \mu\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + (2\mu + \lambda)\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + F_2 = 0.\end{aligned} \tag{31}$$

作为边界条件，例如对方程组 (31)，可以在区域的边界上给出位移向量分量 u_1，u_2 的值，即

$$u_1 = g_1,\ u_2 = g_2$$

或者给出应力向量分量的值

$$\begin{aligned}\tau_{11}\cos(\boldsymbol{n}, x_1) + \tau_{12}\cos(\boldsymbol{n}, x_2) = f_1,\\ \tau_{12}\cos(\boldsymbol{n}, x_1) + \tau_{22}\cos(\boldsymbol{n}, x_2) = f_2,\end{aligned} \tag{32}$$

其中 τ_{ij} 由 (28),(29) 确定．还可以有其他的边界条件的提法．

4. 板的平衡． 作为弹性理论问题的第二个例子，我们考察薄板的平衡方程．我们把板看作是这样的弹性体，它的两侧为平行平面所界，这两个平面间的距离远小于此物体的其他尺寸．

我们取一块均匀各向同性板，板厚等于 h，并将它放置在坐标系中，使得平面 (x_1, x_2) 为板的中面．假定板上的荷载垂直于板的上表面，而下表面是自由的．

为得到描述板的变形状态方程，我们利用前面引入的关系式 (24)，并假定 $F_1 = F_2 = F_3 = 0$，即假定没有体积力．

用 x_3 乘关系式 (24) 的前两个方程并将它们从 $-\frac{h}{2}$ 到 $\frac{h}{2}$ 对 x_3 积分，再用分部积分变换左边的最后二项．注意到

应力张量的对称性及荷载垂直于板面的条件，即

$$\tau_{13}(x_1, x_2, h/2) = \tau_{13}(x_1, x_2, -h/2) = \tau_{23}(x_1, x_2, h/2) = \tau_{23}(x_1, x_2, -h/2) = 0,$$

就有

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x_1}\int_{-h/2}^{h/2}\tau_{11}x_3dx_3 + \frac{\partial}{\partial x_2}\int_{-h/2}^{h/2}\tau_{12}x_3dx_3 - \int_{-h/2}^{h/2}\tau_{13}dx_3 = 0, \\ &\frac{\partial}{\partial x_1}\int_{-h/2}^{h/2}\tau_{12}x_3dx_3 + \frac{\partial}{\partial x_2}\int_{-h/2}^{h/2}\tau_{22}x_3dx_3 - \int_{-h/2}^{h/2}\tau_{23}dx_3 = 0. \end{aligned} \tag{33}$$

对(24)的第三个方程从 $-h/2$ 到 $h/2$ 对 x_3 积分，并利用应力张量的对称性以及荷载作用于板的上表面，则有

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\int_{-h/2}^{h/2}\tau_{13}dx_3 + \frac{\partial}{\partial x_2}\int_{-h/2}^{h/2}\tau_{23}dx_3 + \tau_{33}(x_1,x_2,h/2) = 0. \tag{34}$$

我们引进如下记号:

$$\begin{aligned} &M_1 = \int_{-h/2}^{h/2}\tau_{11}x_3dx_3, \qquad M_2 = \int_{-h/2}^{h/2}\tau_{22}x_3dx_3, \\ &M_{12} = -\int_{-h/2}^{h/2}\tau_{12}x_3dx_3, \qquad q = \tau_{33}(x_1,x_2,h/2), \\ &Q_1 = \int_{-h/2}^{h/2}\tau_{13}dx_3, \qquad Q_2 = \int_{-h/2}^{h/2}\tau_{23}dx_3. \end{aligned} \tag{35}$$

函数 $M_1(x_1,x_2)$，$M_2(x_1,x_2)$ 称为**弯矩**，$M_{12}(x_1, x_2)$ 称为**扭矩**，$Q_1(x_1, x_2)$，$Q_2(x_1, x_2)$ 称为**剪力**．按这些新符号，方程(33)，(34)的形式为

$$\frac{\partial M_1}{\partial x_1} - \frac{\partial M_{12}}{\partial x_2} - Q_1 = 0,$$

$$-\frac{\partial M_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial M_2}{\partial x_2} - Q_2 = 0,$$

$$\frac{\partial Q_1}{\partial x_1} + \frac{\partial Q_2}{\partial x_2} + q = 0.$$

由此消去 Q_1，Q_2 得到一个具有三个未知函数的方程，

$$\frac{\partial^2 M_1}{\partial x_1^2} - 2\frac{\partial^2 M_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 M_2}{\partial x_2^2} = -q. \tag{36}$$

但是这三个未知函数并不是独立的，只要将矩 M_1，M_2，M_{12} 用挠度函数 $w(x_1, x_2) = u_3(x_1, x_2, 0)$ 表示，就可确信这一点．我们假定挠度与板的厚度相比是很小的，而中曲面（受荷载后板中面所变成的那个曲面）是中性的，即它不受拉伸和压缩．

首先求出用 w 表示的相对伸长 $\varepsilon_{11}(x_1, x_2, x_3)$，$\varepsilon_{22}(x_1, x_2, x_3)$ 和相对剪切 $\varepsilon_{12}(x_1, x_2, x_3)$ 的公式．取板的一个微元，它由平面 $x_1 = \mathring{x}_1$，$x_1 = \mathring{x}_1 + \Delta x_1$；$x_2 = \mathring{x}_2$，$x_2 = \mathring{x}_2 + \Delta x_2$ 截板所得．假定这微元变形后它的侧面仍为平面．我们考察平行于 Ox_1x_3 平面的变形后微元的截面，这个截面画在图 3 中．

由于挠度很小，可以认为中曲面的转角也很小，所以假定它与它的正切是相等的．由此

$$\Delta\varphi_1 = \frac{\partial w}{\partial x_1}(x_1, x_2) - \frac{\partial w}{\partial x_1}(x_1 + \Delta x_1, x_2)$$
$$= -\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\Delta x_1.$$

距中曲面为 x_3 的板微元在 Ox_1 轴方向的相对伸长正比于 x_3，

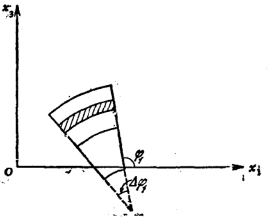


图 3

因此

$$\varepsilon_{11}=x_3\frac{\Delta\varphi_1}{\Delta x_1}=-x_3\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}. \tag{37}$$

类似地可求出

$$\varepsilon_{22}=-x_3\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}. \tag{38}$$

这样，相对伸长的关系式就找到了.

在变形时，截取曲面微元的那些平面要发生转动. 这时板上点的位移 u_1 当点距中曲面越远及转角越大时，它也就越大. 所以

$$u_1(x_1, x_2, x_3)=-x_3\frac{\partial w}{\partial x_1}.$$

根据类似的考虑

$$u_2(x_1, x_2, x_3)=-x_3\frac{\partial w}{\partial x_2}.$$

将这些式子代入 ε_{12} 的表示式中，得

$$\varepsilon_{12}=-x_3\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\partial x_2}. \tag{39}$$

为了从所给的变形中求应力，我们应用虎克定律 (29)，同时我们假定应力张量分量 τ_{33}，与 τ_{11}，τ_{22} 相比很小，可以忽略. 因此

$$\tau_{11}=\frac{4\mu(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}\varepsilon_{11}+\frac{2\mu\lambda}{2\mu+\lambda}\varepsilon_{22},$$

$$\tau_{22}=\frac{2\mu\lambda}{2\mu+\lambda}\varepsilon_{11}+\frac{4\mu(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}\varepsilon_{22},$$

$$\tau_{12}=2\mu\varepsilon_{12}.$$

将拉梅系数 λ 和 μ 换成其他的弹性常数——伸长模量 E（杨氏模量）和泊松系数 ν，它们和 λ, μ 的关系是

$$\lambda=\frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)},\quad \mu=\frac{E}{2(1+\nu)},$$

我们得到

$$\tau_{11}=\frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_{11}+\nu\varepsilon_{22}),\quad \tau_{22}=\frac{E}{1-\nu^2}(\nu\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}),$$

$$\tau_{12}=\frac{E}{1+\nu}\varepsilon_{12}.$$

将关系式 (37)—(39) 代入这里，并将新得到的 τ_{ij} 的表示式代入 (35) 就得出用挠度函数表示力矩的表达式

$$M_1=-D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right),$$

$$M_2=-D\left(\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right), \tag{40}$$

$$M_{12}=D(1-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\partial x_2},$$

其中 $D=Eh^3/12(1-\nu^2)$ 是板的刚度系数.

最后，将 (40) 式代入方程 (36) 得到挠度函数的方程

$$\Delta^2 w=\frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x_1^2\partial x_2^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial x_2^4}=\frac{q}{D}. \tag{41}$$

当研究板的能量变分时，很自然地可以得到方程 (41) 的边界条件. 我们不去推导能量表达式，而仅写出单位边长方板的能量表示式，

$$W=\frac{D}{2}\int_0^1\int_0^1\left\{(\Delta w)^2-2(1-\nu)\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}-\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\partial x_2}\right)^2\right]\right\}dx_1dx_2. \tag{42}$$

对能量 (42) 作变分并用分部积分将所得的式子改变形状，我们得到如下的边界条件 (例如对 $x_1=0$):

1) 固支条件

$$w(0,x_2)=0,\quad \frac{\partial w}{\partial x_1}(0,x_2)=0.$$

2) 铰支条件

$$w(0,x_2)=0,\quad D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)=0.$$

3）自由端条件

$$D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}+\nu\frac{\partial^3 w}{\partial x_2^2}\right)=0,$$

$$D\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}+(2-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)=0.$$

在板边界的其他区间上，也可以写出类似的边界条件．我们仅指出，如果在板的相邻两边上给出的是自由边界条件，则在这两边的交角处，要补充给出扭矩的值．

除了这些边界条件外，还可以给出另外类型的边界条件，但这里就不谈了．

§2. 椭圆型方程简介

1. 二阶方程． n 个自变量的二阶线性偏微分方程有如下的形式：

$$L(u)=\sum_{\alpha,\beta=1}^{n}A_{\alpha\beta}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha\partial x_\beta}+\sum_{\alpha=1}^{n}B_\alpha(x)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}+C(x)u=f(x),\qquad(1)$$

这里的 $A_{\alpha\beta}$, B_α, C, f 是自变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的实函数；变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 看作是 n 维欧氏空间 E_n 中某个点 x 的坐标．而且假定函数 $A_{\alpha\beta}$, B_α, C 是可测的和有界的．方程(1)在点 $\bar{x}$ 称为**椭圆型的**，如果

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{n}A_{\alpha\beta}(\bar{x})\xi_\alpha\xi_\beta\neq 0\quad 当\ |\xi|\neq 0,\qquad(2)$$

其中 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 是任意实数，而 $|\xi|=\left(\sum_{\alpha=1}^{n}\xi_\alpha^2\right)^{1/2}$.

椭圆性条件 (2)，还可以有其他的形式. 不等式 (2) 左边是 ξ_α 的连续函数，所以当满足不等式 (2) 时不变号. 必要时可改变所有系数 $A_{\alpha\beta}$ 的符号，代替 (2) 可得等价的条件

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} A_{\alpha\beta}(\bar{x})\xi_\alpha\xi_\beta > 0 \quad \text{当} \quad |\xi| \neq 0. \tag{3}$$

不失一般性，可以认为 $A_{\alpha\beta}(\bar{x}) = A_{\beta\alpha}(\bar{x})$，所以不等式 (3) 是二次型正定的条件. 而对于正定二次型成立不等式

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} A_{\alpha\beta}(\bar{x})\xi_\alpha\xi_\beta \geqslant \nu(\bar{x})\sum_{\alpha=1}^{n} \xi_\alpha^2, \quad \nu(\bar{x}) > 0, \tag{4}$$

其中 $\nu(\bar{x})$ 是对称矩阵 $\|A_{\alpha\beta}\|$ 的最小固有值. 因此在方程 (1) 的椭圆性定义中可以用要求满足条件 (4) 来代替条件 (2).

在二维空间的情况下，即 $n = 2$，椭圆性条件 (2)，或者说二次型 (2) 正定性条件可表示成

$$A_{12}^2(\bar{x}) = A_{21}^2(\bar{x}) < A_{11}(\bar{x})A_{22}(\bar{x}). \tag{5}$$

方程 (1) 称为在区域 $D \in E_n$ 是椭圆型的，如果在此区域的每一点它是椭圆型的.

方程 (1) 称为在区域 $D \in E_n$ 是一致椭圆型的，如果在条件 (4) 中

$$\inf_{x \in D} \nu(x) = \nu > 0.$$

这时代替 (4) 可写成

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} A_{\alpha\beta}(x)\xi_\alpha\xi_\beta \geqslant \nu\sum_{\alpha=1}^{n} \xi_\alpha^2, \quad x \in D, \quad \nu = \text{const} > 0. \tag{6}$$

作为二阶椭圆型方程例子的有

拉普拉斯方程

$$\Delta u = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2} = 0,$$

泊松方程

$$-\Delta u = f(x),$$

不含混合导数的方程

$$-\sum_{\alpha=1}^{n} A_{\alpha\alpha}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2} + \sum_{\alpha=1}^{n} B_\alpha(x) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} + C(x)u = f(x),$$

$$A_{\alpha\alpha} > 0.$$

2. 高阶方程. n 个自变量的 2 m 阶线性偏微分方程可写成

$$\sum_{k=0}^{2m} \sum_{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k=1}^{n} A_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_k}(x) \frac{\partial^k u}{\partial x_{\alpha_1}\partial x_{\alpha_2}\cdots\partial x_{\alpha_k}} = f(x). \quad (7)$$

方程 (7) 在点 $\bar{x}$ 称为椭圆型的，如果

$$\sum_{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{2m}=1}^{n} A_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{2m}}(\bar{x})\xi_{\alpha_1}\xi_{\alpha_2}\cdots\xi_{\alpha_{2m}} \neq 0, \text{ 当 } |\xi| \neq 0. \quad (8)$$

方程 (7) 称为在区域 $D \in E_n$ 是椭圆型的，如果在区域的每一点它都是椭圆型的.

与二阶方程一样，椭圆性条件 (8) 可写成

$$\sum_{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{2m}=1}^{n} A_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{2m}}(\bar{x})\xi_{\alpha_1}\xi_{\alpha_2}\cdots\xi_{\alpha_{2m}} \geqslant \nu(\bar{x}) \sum_{\alpha=1}^{n} \xi_\alpha^{2m}. \quad (9)$$

重调和方程是高阶椭圆型方程的重要例子，

$$(-\Delta)^m u = f(x),$$

其中 Δ^m 是 m 重拉普拉斯算子，并且根据递推关系的定义，

$$\Delta^1 u = \Delta u, \ \Delta^2 u = \Delta(\Delta u), \cdots, \ \Delta^m u = \Delta(\Delta^{m-1}u),$$

$$m > 1.$$

当 $m = n = 2$ 时，就是平面双调和方程

$$\Delta^2 u = \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x_2^4} = f(x).$$

当 $n > 1$ 时，一切椭圆型方程都是偶次阶的.

3. 方程组. 假定偏微分方程组包含 p 个未知函数 u_1, $u_2, \cdots, u_p$，每个函数依赖于 n 个变量，令 m_j 是方程组中函数

u_i 的导数的最高阶数．这样的方程可写成

$$\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{m_j}\sum_{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k=1}^{n} A^{(i,j)}_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_k}(x)\frac{\partial^k u_j}{\partial x_{\alpha_1}\partial x_{\alpha_2}\cdots\partial x_{\alpha_k}} = f_i(x),$$
$$i = 1, 2, \cdots, p. \tag{10}$$

我们考察 p 阶行列式，它的第 i 行第 j 列上的元素为

$$\sum_{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{m_j}=1}^{n} A^{(i,j)}_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{m_j}}\xi_{\alpha_1}\xi_{\alpha_2}\cdots\xi_{\alpha_{m_j}}.$$

方程组 (10) 在 $\bar{x}$ 点称为椭圆型的，如果

$$\det\left|\sum_{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{m_j}=1}^{n} A^{(i,j)}_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{m_j}}(\bar{x})\xi_{\alpha_1}\xi_{\alpha_2}\cdots\xi_{\alpha_{m_j}}\right| \neq 0,$$
$$|\xi| \neq 0. \tag{11}$$

方程组 (10) 称为在某区域 $D\in E_n$ 是椭圆型的，如果它在该区域的每一点 $\bar{x}\in D$ 都是椭圆型的．

拉梅方程组是椭圆型方程组的一个很重要的例子

$$(\lambda+2\mu)\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}+\mu\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2}+\mu\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2}+(\lambda+\mu)\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1\partial x_2}$$
$$+(\lambda+\mu)\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1\partial x_3} = -f_1,$$

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1\partial x_2}+\mu\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2}+(\lambda+2\mu)\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2}$$
$$+\mu\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2}+(\lambda+\mu)\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2\partial x_3} = -f_2,$$

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1\partial x_3}+(\lambda+\mu)\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2\partial x_3}+\mu\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2}$$
$$+\mu\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2}+(\lambda+2\mu)\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} = -f_3.$$

这个方程组包含三个未知函数 ($p=3$)，它们依赖于三个自变量 ($n=3$)．这个方程组仅包含二阶导数 ($m_j=2$)．对这个方程组而言，条件 (11) 中出现的行列式等于

$$\begin{vmatrix} \mu|\xi|^2+(\lambda+\mu)\xi_1^2 & (\lambda+\mu)\xi_1\xi_2 & (\lambda+\mu)\xi_1\xi_3 \\ (\lambda+\mu)\xi_1\xi_2 & \mu|\xi|^2+(\lambda+\mu)\xi_2^2 & (\lambda+\mu)\xi_2\xi_3 \\ (\lambda+\mu)\xi_1\xi_3 & (\lambda+\mu)\xi_2\xi_3 & \mu|\xi|^2+(\lambda+\mu)\xi_3^2 \end{vmatrix} = \mu^2(\lambda+2\mu)|\xi|^6.$$

在实际问题中，最低限度有 $\lambda>0$ 和 $\mu>0$，因此当$|\xi|\neq 0$时，上述行列式不会为零.

在二维情况下，方程组的形式为

$$(\lambda+2\mu)\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}+\mu\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2}+(\lambda+\mu)\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1\partial x_2}=-f_1,$$

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1\partial x_2}+\mu\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2}+(\lambda+2\mu)\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2}=-f_2,$$

条件 (11) 的行列式等于 $\mu(\lambda+2\mu)|\xi|^4$.

4. 广义解. 设在 n 维欧氏空间的区域 G 中，给定二阶椭圆型方程

$$Lu=\sum_{\alpha,\beta=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(A_{\alpha\beta}(x)\frac{\partial u}{\partial x_\beta}\right)+\sum_{\alpha=1}^{n}B_\alpha(x)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}+C(x)u=f(x). \tag{12}$$

函数 $u(x)$ 称为方程 (12) 在 $W_2^1(G)$ 中的广义解，如果它属于空间 $W_2^1(G)$，并且对任意的函数 $\eta(x)\in \mathring{W}_2^1(G)$ 都满足积分恒等式

$$\int_G\left(-\sum_{\alpha,\beta=1}^{n}A_{\alpha\beta}\frac{\partial u}{\partial x_\beta}\frac{\partial \eta}{\partial x_\alpha}+\sum_{\alpha=1}^{n}B_\alpha\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\eta+Cu\eta\right)dx=\int_G f\eta dx. \tag{13}$$

这里的 $W_2^1(G)$ 是函数空间，这些函数都属于 $L_2(G)$ 并且有一阶广义导数，这些广义导数也属于 $L_2(G)$. $W_2^1(G)$ 中的范数定义为

$$\|u\|_{W_2^1(G)} = \left\{\int_G \left[\sum_{\alpha=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right)^2 + u^2\right]dx\right\}^{1/2}. \qquad (14)$$

$\mathring{W}_2^1(G)$ 是 $W_2^1(G)$ 的子空间，它是由无限可微并在G中有列紧支集的函数所构成的集合根据 $W_2^1(G)$ 的范数所得的闭包.

设方程 (12) 在区域G的边界Γ上给定了边界条件

$$u(x) = 0, \quad x \in \Gamma. \qquad (15)$$

函数 $u(x) \in \mathring{W}_2^1(G)$ 称为问题 (12),(15) 在 $W_2^1(G)$ 中的广义解，如果对任意函数 $\eta(x) \in \mathring{W}_2^1(G)$，它满足积分等式 (13).

设方程 (12) 在边界Γ上给出了边界条件

$$\frac{\partial u}{\partial n} \equiv \sum_{\alpha,\beta=1}^{N} A_{\alpha\beta}\frac{\partial u}{\partial x_\beta}\cos(n, x_\alpha) = 0, \qquad (16)$$

其中n是Γ的内法线.

函数 $u(x) \in W_2^1(G)$ 称为问题 (12), (16) 在 $W_2^1(G)$ 中的广义解，如果它对于任意函数 $\eta(x) \in W_2^1(G)$，满足积分恒等式 (13).

对于高阶方程和方程组的广义解可作类似的定义.

5. 边值问题的变分提法. 导至椭圆型方程的很多数学物理问题，除了寻求微分方程的解这个基本提法外，还有所谓变分提法. 这就是说，存在一个泛函，它的极小元就是所讨论的问题的解. 在此情况下寻找微分方程某种解的问题，可用寻找使相应泛函达到极值的元的问题来代替.

令G是n维欧氏空间中的区域，要求寻找微分方程

$$Lu \equiv \sum_{\alpha,\beta=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(A_{\alpha\beta}(x)\frac{\partial u}{\partial x_\beta}\right) - C(x)u = f(x) \qquad (17)$$

的解，它在区域G的边界Γ上满足第一类齐次边界条件

$$u(x) = 0, \ x \in \Gamma. \qquad (18)$$

假定方程 (17) 是椭圆型的，而且矩阵 $\{A_{\alpha\beta}(x)\}$ 是对称的，

即 $A_{\alpha\beta}(x)=A_{\beta\alpha}(x)$. 问题 (17),(18) 等价于如下的变分问题：在满足条件 (18) 充分光滑的函数类中,寻找使下面泛函取极小的元

$$I(u)=\frac{1}{2}\int_G\left[\sum_{\alpha,\beta=1}^{n}A_{\alpha\beta}(x)\frac{\partial u}{\partial x_\beta}\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}+C(x)u^2\right]dx + \int_G f(x)u(x)dx. \tag{19}$$

如果在区域 G 中要求方程 (17) 满足第二类边界条件 (16) 的解，则相应的变分问题的提法是在充分光滑的函数类中寻找使泛函 (19) 取极小的元. 对第二类边值问题,在求极小元的函数类上不需加任何边界条件.

对拉梅方程组

$$\sum_{j=1}^{2}\left[\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\lambda\frac{\partial u_j}{\partial x_j}\right)+\frac{\partial}{\partial x_j}\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right]+F_i=0,\quad i=1,2,$$

并带有第二类边界条件

$$\sum_{j=1}^{2}\tau_{ij}\cos(n,x_j)+f_i=0,\quad i=1,2,\quad x\in\Gamma,$$

它的变分提法是在充分光滑的向量函数类中，寻找使下面泛函取极小的元

$$I(u)=W(u)-\int_G\sum_{i=1}^{2}F_iu_i-\int_\Gamma\sum_{i=1}^{2}f_iu_idS,$$

其中

$$W(u)=\frac{1}{2}\int_G\left\{2\mu\left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)^2\right]+\lambda\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)^2 + \mu\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}+\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)^2\right\}dx.$$

泛函 $W(u)$ 是弹性变形能.

最后，我们指出二维双调和方程第一类边值问题的变分

提法．在区域G中寻找方程

$$\Delta^2 u = f(x), \quad x \in G \tag{20}$$

的解，使它在边界Γ上满足第一类边界条件

$$u(x) = \frac{\partial u(x)}{\partial n} = 0, \quad x \in \Gamma. \tag{21}$$

问题(20)，(21)的变分提法是在充分光滑并且满足条件(21)的函数类中，寻找使下面泛函取极小的元：

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_G \left\{(\Delta u)^2 - 2(1-\nu)\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\right)^2\right]\right\} dx - \int_G f(x) u dx. \tag{22}$$

在板的弯曲问题中，ν就是泊松比．对所考虑的情况，极小元不依赖于ν，因而可令$\nu = 1$而使泛函$I(u)$得以简化．

如果在寻找使泛函(22)取极小的函数类中不附边界条件(21)，则任一个使这个泛函取极小的元都是方程(20)带所谓自由端条件的解(参看§1，4段)．

第二章 构造差分格式的方法

§1. 网格法的基本概念

有限差分方法，或网格法，现在是偏微分方程边值问题近似解法中应用最广泛的方法之一．方法要点如下．自变量的连续变化区域(例如，线段，矩形等)用有限(离散)的点(节点)的集合代替，这个点集叫做网格；连续变量的函数用定义在网格节点上离散变量的函数代替，这种函数叫做网格函数．出现在微分方程和边界条件中的导数用差商代替(逼近)，也就是用某些网格节点上网格函数值的线性组合代替；于是，微分方程边值问题代换成线性（如原问题是线性的）代数方程组(差分格式)．

如果这样得到的差分边值问题可解并且其解当网格变小时接近(收敛)于原微分方程问题的解，则该解就作为原问题的近似解．

虽然看起来方法似乎简单，但在着手解具体问题之前必须回答以下问题：

1. 怎样选取网格？

2. 怎样列出差分格式？

如果这两个问题已经解决，那末重要的是关于以下问题的信息：

3. 差分格式逼近原问题的良好程度如何？

4. 差分格式是否稳定，以及在什么意义下稳定？

5. 差分问题的解以怎样的速度收敛于原问题的解？

本节就是对这种或那种课题来分析这几个问题的.

1. 网格和网格函数. 考察最简单的网格例子. 假定自变量 x 的变化区域是线段 $0 \leqslant x \leqslant l$. 用点 $x_i = ih$, $i = 0, 1, \cdots, N$ 将该线段分成 N 等分, 每段长为 $h = l/N$. 点 $x_i = ih$, $i = 0, 1, \cdots, N$ 的集合称为线段 $0 \leqslant x \leqslant l$ 上的均匀网格, 并记为 $\bar{\omega} = \{x_i = ih | i = 0, 1, 2, \cdots, N\}$, 而数值 h——网格 $\bar{\omega}$ 上各点(节点)的间距——称为网格步长.

线段 $[0, l]$ 可以用任意的分点 $0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_i < x_{i+1} < \cdots < x_{N-1} < l$ 分成 N 分. 这样得到的网格 $\bar{\omega} = \{x_i | i = 0, 1, 2, \cdots, N, x_0 = 0, x_N = l\}$, 其步长 $h_i = x_i - x_{i-1}$ 和节点的序号 i 有关. 即使对一个序号 i 有 $h_i \neq h_{i+1}$, 则称 $\bar{\omega}$ 为非均匀网格. 如果对所有的 $i = 1, 2, \cdots, N$ 都有 $h_i = \text{const} = h = l/N$, 则得到上面所建立的均匀网格.

在无限的直线 $-\infty < x < \infty$ 上可以考虑以任意点 x 为原点由无穷个节点所组成的网格 $\Omega = \{x + ih | i = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$.

有时这样建立网格是方便的, 只是第一步与众不同, 其余的步长都一样. 网格

$$\bar{\omega} = \{x_i = ih + 0.5h | i = 0, 1, 2, \cdots, N,\\ h = l/(N + 0.5)\}$$

可作为 $[0, l]$ 上这种网格的例子. 这时线段左端点 $x = 0$ 不是网格的节点.

假定自变量 $x = (x_1, x_2)$ 的变化区域是矩形 $D = \{x = (x_1, x_2) | 0 \leqslant x_\alpha \leqslant l_\alpha, \alpha = 1, 2\}$. 在线段 $0 \leqslant x_\alpha \leqslant l_\alpha$ 上建立步长为 $h_\alpha = l_\alpha / N_\alpha$ 的网格 $\bar{\omega}_\alpha = \{x_\alpha^{(i_\alpha)} = i_\alpha h_\alpha | i_\alpha = 0, 1, 2, \cdots, N_\alpha\}$. 坐标为 $x_1^{(i_1)} = i_1 h_1$, $x_2^{(i_2)} = i_2 h_2$ 的节点 $x = x_i = (x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_2)})$, $i = (i_1, i_2)$ 的集合称为矩形 D 的网格, 并记为 $\bar{\omega} = \{x = (x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_2)}) | x_\alpha^{(i_\alpha)} = i_\alpha h_\alpha, i_\alpha = 0, 1, 2, \cdots, N_\alpha;$

$\alpha=1, 2\}$. 这个网格对每个变量 x_1 和 x_2 都是均匀的. 如果网格 $\bar{\omega}_\alpha$ 中即使有一个是非均匀的, $\bar{\omega}$ 就称为非均匀网格. 如果 $h_1=h_2$, 则称为正方形网格. 如果 $h_1\neq h_2$, 则均匀网格 $\bar{\omega}$ 称为矩形网格. 显然, 网格 $\bar{\omega}$ 由直线 $x_1=x_1^{(i_1)}=i_1h_1$, $i_1=0, 1, 2, \cdots, N_1$ 和直线 $x_2=x_2^{(i_2)}=i_2h_2$, $i_2=0, 1, 2, \cdots, N_2$ 的交点组成.

离散变量 x_i, $i=0, 1, 2, \cdots, N$ 的函数 $\varphi=\varphi(x_i)$ 称为定义在网格 $\bar{\omega}$ (网格给定在线段 $[0, l]$ 上) 上的网格函数.

对于给定在线段 $[0, l]$ 上的任意连续函数 $f(x)$, 可以对应一个给定在网格 $\bar{\omega}$ 上的网格函数 φ_i($f(x)$ 在网格 $\bar{\omega}$ 上的投影),比如,令 $\varphi_i=f(x_i)\equiv f_i$,

$$\varphi_i=\frac{1}{h}\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}}f(x)\,dx$$

等等. 上面指出的在网格上投影的第二种方法不仅对于连续函数,而且对于具有第一类间断的函数,甚至对于只是可积的函数都是可以实现的.

应当指出,同一个网格函数,当它给定在两个不同的但又有公共节点的网格上时, 在这些公共节点上该网格函数不必取同样的值.更精确地说,假设有某一网格函数 $\varphi^h(x)$ 和两个网格,其中一个的步长 $h=h_1$, 另一个是 $h=h_2$, 且 $h_1\neq h_2$. 这两个网格分别记为 ω^{h_1} 和 ω^{h_2}. 这时,一般来讲,当 $x\in\omega^{h_1}$ 且 $x\in\omega^{h_2}$ 时 $\varphi^{h_1}(x)\neq\varphi^{h_2}(x)$. 网格函数

$$\varphi_i=\frac{1}{h}\int_{(i-0.5)h}^{(i+0.5)h}f(x)\,dx$$

就是这种函数中最简单的一个例子,这里 $f(x)$ 是连续变量的函数.

2. 最简单微分算子的逼近. 逼近误差. 将网格函数 y 变

换成网格函数 $Y = L_h y$ 的算子 L_h 称为网格算子或差分算子．给定在连续变量函数类上的微分算子 L 可以近似地用给定在网格函数上的差分算子 L_h 代替（逼近）．为此将每个导数换成差商，后者包含若干个节点上网格函数的值．建立差分算子所用到的节点集合称为该算子的模式．

现在看一看如何建立一元函数的一阶和二阶导数的逼近．

假设 $\Omega = \{x + ih \mid i = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$ 是直线 $-\infty < x < \infty$ 上步长为 h 的均匀网格．考虑函数 $v(x)$ 的一阶导数 $Lv = v'$．可以用各种方法将导数换成差商表达式．例如，

$$Lv \sim \frac{v_i - v_{i-1}}{h} = L_h^- v_i$$

是左差商，

$$Lv \sim \frac{v_{i+1} - v_i}{h} = L_h^+ v_i$$

是右差商，

$$Lv \sim \frac{v_{i+1} - v_{i-1}}{2h} = L_h^\circ v_i$$

是中心差商．

这里 $v_i = v(x_i)$，符号～表示对应或逼近．将算子 Lv 换成差商表达式 $L_h v$ 所产生的误差 $L_h v_i - (Lv)_i = \psi_i$ 称为差分算子 L_h 逼近算子 L 的逼近误差．自然要求，当 h 趋近于零时该误差趋近于零．为了估计 ψ_i，应假定 $v(x)$ 是光滑的函数．假设 $v(x) \in C^{(m)}$，这里 $m \geqslant 2$．将 $v(x)$ 在点 $x = x_i$ 邻域按泰勒公式展开，

$$v_{i\pm 1} = v_i \pm h v_i' + O(h^2),$$

并算出

$$\psi_i^- = L_h^- v_i - v_i' = O(h), \quad \psi_i^+ = L_h^+ v_i - v_i' = O(h).$$

由此推出，当 $h\to 0$ 时 $\psi_i^{\pm}\to 0$.

假设 L 是微分算子，L_h 是给定在某网格 Ω 上的差分算子，其中 h 是表征网格粗细的参数. 我们说差分算子 L_h:

1）在节点 $x_i\in\Omega$ 逼近微分算子 L，如果当 $h\to 0$ 时 $\psi_i=L_hv_i-(Lv)_i$ 趋近于零，其中 $v(x)$ 是充分光滑的函数；

2）在节点 $x_i\in\Omega$ 以阶 $n(n>0)$ 逼近 L，如果 $\psi_i=O(h^n)$.

回到 $L_h^{\pm}$ 的公式，我们看出，当 $v\in C^{(m)}$, $m>2$ 时 L_h^- 和 L_h^+ 逼近 $Lv=v'$ 的阶是 1. m 增大时逼近的阶不变.

现在取算子 L_h°. 不难证明，当 $v(x)\in C^{(m)}$, $m\geqslant 3$ 时 $L_h^{\circ}v_i$ 逼近 $v'(x)$ 的阶是 2.

今后我将利用下面的记号

$$v_{\bar{x},i}=(v_i-v_{i-1})/h,\quad v_{x,i}=(v_{i+1}-v_i)/h,$$

$$v_{\mathring{x},i}=(v_{i+1}-v_{i-1})/(2h)=\frac{1}{2}(v_{x,i}+v_{\bar{x},i}).$$

在某些场合，节点的标号 i 没有意义，我们就将它省去并简记作 $v_{\bar{x}}$, v_x, $v_{\mathring{x}}$.

现在考察二阶导数 $Lv=v''$. 显然，不能用二点模式来逼近它. 我们选用由节点 x_{i-1}, x_i, x_{i+1} 组成的三点模式并考虑差分算子

$$L_hv_i=v_{\bar{x}x,i}=\frac{1}{h}(v_{x,i}-v_{\bar{x},i})$$

$$=\frac{v_{i+1}-2v_i+v_{i-1}}{h^2}.$$

如果 $v(x)\in C^{(m)}, m\geqslant 4$，则可以写出

$$v_{i\pm1}=v_i\pm hv_i'+\frac{h^2}{2}v_i''\pm\frac{h^3}{6}v_i'''+O(h^4).$$

由此推知（省去标号 i）

$$v_{\bar{x}x}-v''=O(h^2),$$

即 $v_{\bar{x}x}$ 逼近 v'' 的阶是 2.

我们指出,差分算子逼近的阶事实上依赖于函数 $v(x)$ 可微的阶 m. 我们在各处实际上说的是逼近的最高阶，它不随函数类 $C^{(m)}$ 的标号 m 增大而改变，并假定 $v(x)$ 是 $C^{(m)}$ 中的任意函数.

现在考察更复杂的算子

$$Lu \equiv \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2},$$

其中 $u = u(x_1, x_2)$ 是在平面 Ox_1x_2 上变化的两个自变量 x_1, x_2 的函数. 引进网格

$$\Omega = \{x_i = x_{i_1 i_2} = (x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_2)}) \mid x_\alpha^{(i_\alpha)} = x_\alpha + i_\alpha h_\alpha,$$
$$i_\alpha = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots, \alpha = 1, 2\}.$$

并作代换

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right|_{x=x_i} \sim \frac{u(x_1^{(i_1-1)}, x_2^{(i_2)}) - 2u(x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_2)}) + u(x_1^{(i_1+1)}, x_2^{(i_2)})}{h_1^2}$$
$$= u_{\bar{x}_1 x_1, i},$$
$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right|_{x=x_i} \sim \frac{u(x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_2-1)}) - 2u(x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_2)}) + u(x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_2+1)})}{h_2^2}$$
$$= u_{\bar{x}_2 x_2, i}.$$

因此得到差分算子 $L_h u_i = (u_{\bar{x}_1 x_1} + u_{\bar{x}_2 x_2})_i$. 这个算子定义在由五点 $(x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_2)})$, $(x_1^{(i_1-1)}, x_2^{(i_2)})$, $(x_1^{(i_1+1)}, x_2^{(i_2)})$, $(x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_2-1)})$, $(x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_2+1)})$ 组成的模式上. 因为

$$u_{\bar{x}_\alpha x_\alpha} = \partial^2 u/\partial x_\alpha^2 + O(h_\alpha^2), \quad \alpha = 1, 2,$$

所以算子 L_h 关于 h_1 和 h_2 都是二阶逼近,

$$\psi(x_i) = L_h u_{i_1 i_2} - (Lu)_{i_1 i_2} = O(h_1^2 + h_2^2).$$

到现在为止,我们估计了在个别节点 $x_i \in \Omega$ 上逼近误差 $\psi = L_h v - Lv$ 的大小. 如果算子 L_h 在所有节点 $x_i \in \Omega$ 上逼近算子 L, 则说 L_h 在网格 Ω 上逼近 L. 这时,为了估计逼

近误差，利用C范数是方便的，

$$\|\phi\|_C = \max_{x\in\Omega}|\phi(x)|. \tag{1}$$

为了估计网格函数ϕ的大小，也可以利用其它范数，例如

$$\|\phi\|_{L_1} = \sum_{x\in\Omega} H|\phi(x)|,\quad \|\phi\|_{L_2} = \left(\sum_{x\in\Omega} H\phi^2(x)\right)^{1/2}, \tag{2}$$

这里，在一维情况下 $H = h$，在二维情况下 $H = h_1h_2$.

假设 $\|\phi\|$ 是给定在网格Ω上函数 $\phi(x)$ 的某种范数．今后我们说差分算子 L_h：1）按范数$\|\cdot\|$逼近微分算子 L，如果当 $h\to 0$ 时 $\|\phi\| = \|L_hv - Lv\|\to 0$；2）以阶 $n>0$ 逼近（L_h 具有n阶逼近），如果 $\|\phi\| = O(h^n)$ 或 $\|\phi\|\leqslant Mh^n$，这里 $M = \text{const} > 0$ 与h无关．

如果v是充分光滑的函数，且Ω是均匀网格，则上述的全部差分算子，对于(1)，(2)中任一种范数，逼近的阶都是一样的．

对于非均匀网格，情况就不一样了．假设

$$\bar{\omega} = \{x_i | i = 0,1,\cdots,N,\ x_0 = 0,\ x_N = 1\}$$

是线段$[0,1]$上步长为 $h_i = x_i - x_{i-1}$，$i = 1,2,\cdots,N$ 的非均匀网格．考虑算子 $Lv = v''$．我们将它对应一个定义在三点模式 (x_{i-1},x_i,x_{i+1}) 上的差分算子

$$L_hv_i = \frac{1}{\hbar_i}\left[\frac{v_{i+1}-v_i}{h_{i+1}} - \frac{v_i - v_{i-1}}{h_i}\right],$$

$$\hbar_i = \frac{1}{2}(h_i + h_{i+1}). \tag{3}$$

计算逼近误差

$$\phi_i = L_hv_i - (Lv)_i.$$

假设 $v(x)\in C^{(4)}[0,1]$，并利用泰勒展式

$$v_{i+1} = v_i + h_{i+1}v_i' + \frac{h_{i+1}^2}{2}v_i'' + \frac{h_{i+1}^3}{6}v_i''' + O(h_{i+1}^4),$$

$$v_{i-1} = v_i - h_i v_i' + \frac{h_i^2}{2} v_i'' - \frac{h_i^3}{6} v_i''' + O(h_i^4),$$

得到

$$\begin{aligned}\psi_i &= \frac{h_{i+1} - h_i}{3} v_i''' + O(h_{i+1}^2) + O(h_i^2) \\ &= \frac{h_{i+1} - h_i}{3} v_i''' + O(\hbar_i^2).\end{aligned}$$

由此可见，$\|\psi\|_C = O(h_0)$，$\|\psi\|_{L_1} = O(h_0)$，$\|\psi\|_{L_2} = O(h_0)$，$h_0 = \max_{\bar{\omega}} h_i$。因而 L_h 按范数 $\|\cdot\|_C$，$\|\cdot\|_{L_1}$，$\|\cdot\|_{L_2}$ 都是一阶逼近.

我们证明，适当选择范数，即取

$$\|\psi\| = \left[\sum_{i=1}^{N-1} h_i \left(\sum_{k=1}^{i} \hbar_k \psi_k\right)^2\right]^{1/2}, \tag{4}$$

算子 (3) 有二阶逼近:

$$\|\psi\| = \|L_h v - Lv\| = O(h_0^2).$$

因为 $v_i''' = v_{i+1}''' + O(h_{i+1})$，所以

$$\begin{aligned}(h_{i+1} - h_i) v_i''' &= \frac{h_{i+1}^2 - h_i^2}{(h_i + h_{i+1})} v_i''' \\ &= \frac{1}{2\hbar_i}(h_{i+1}^2 v_{i+1}''' - h_i^2 v_i''') + O(\hbar_i^2),\end{aligned}$$

因而 ψ_i 可表示成

$$\psi_i = \mathring{\psi}_i + \psi_i^*,$$

其中

$$\psi_i^* = O(\hbar_i^2), \quad \mathring{\psi}_i = \frac{1}{\hbar_i}(\eta_{i+1} - \eta_i) = \eta_{\hat{x},i},$$

$$\eta_i = \frac{1}{6} h_i^2 v_i''' = O(h_i^2).$$

计算

$$\sum_{k=1}^{i}\hbar_k\mathring{\phi}_k=\sum_{k=1}^{i}(\eta_{k+1}-\eta_k)=\eta_{i+1}-\eta_1,$$

并注意到 $|\eta|=O(h_0^2)$，则得 $\|\mathring{\phi}\|=O(h_0^2)$． 由此推知，$\|\phi\|\leqslant\|\mathring{\phi}\|+\|\phi^*\|\leqslant Mh_0^2$，其中 $M=\text{const}>0$ 与网格无关，亦即由 (3) 式给出的算子 L_h，在任意非均匀网格 $\bar{\omega}$ 上，按照关系式 (4) 确定的范数$\|\cdot\|$是二阶逼近．对于范数

$$\|\phi\|=\left[\sum_{i=1}^{N-1}h_i\left(\sum_{k=i}^{N-1}\hbar_k\phi_k\right)^2\right]^{1/2},$$

$$\|\phi\|=\sum_{i=1}^{N-1}h_i\left|\sum_{k=1}^{i}\hbar_k\phi_k\right|,$$

此结果仍然成立．我们指出，$\|\phi\|\leqslant\|\phi\|_{L_1}\leqslant\|\phi\|_{L_2}\leqslant\|\phi\|_C$． 对于任意网格函数，相反的不等式不成立．今后对非均匀网格上的差商将利用如下的记号：

$$v_{\bar{x},i}=\frac{v_i-v_{i-1}}{h_i},\quad v_{x,i}=\frac{v_{i+1}-v_i}{h_{i+1}},\quad v_{\hat{x},i}=\frac{v_{i+1}-v_i}{\hbar_i},$$

$$v_{\bar{x}\hat{x},i}=\frac{1}{\hbar_i}(v_{x,i}-v_{\bar{x},i})=\frac{1}{\hbar_i}\left[\frac{v_{i+1}-v_i}{h_{i+1}}-\frac{v_i-v_{i-1}}{h_i}\right].$$

3. 差分问题的提法．逼近和收敛性．到现在为止我们讨论了最简单微分算子的差分逼近．通常要求解带有某些附加条件(例如边值条件)的微分方程 $Lu=-f(x)$．所以，除建立差分算子外，还需要在网格上逼近微分方程的右端以及附加条件，然后才能够提出差分问题，即写出差分(代数)方程组．

我们考察几个差分问题提法的例子．

例 1．二阶微分方程边值问题．

$$Lu=u''=-f(x),\ 0<x<1,\ u(0)=g_0,\ u(1)=g_1\quad(5)$$

在均匀网格 $\bar{\omega}$ 上对应于差分边值问题

$$y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}=-\varphi_ih^2,\ i=1,2,\cdots,N-1,$$
$$y_0=g_0,\ y_N=g_1,\qquad(6)$$

其中 $\varphi_i = f(x_i)$,

$$y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1} = -\bar{\varphi}_i h^2, \quad i = 1, 2, \cdots, N-1,$$

$$y_0 = g_0, \ y_N = g_1, \tag{7}$$

其中 $\bar{\varphi}_i = f(x_i) + \frac{h^2}{12} f''(x_i)$.

例 2. 边值问题

$$u'' = -f(x), \ 0 < x < 1, \ u'(0) = \kappa u(0) - g_0,$$

$$u(1) = g_1 \tag{8}$$

在均匀网格 $\bar{\omega}$ 上对应于两个差分问题:

$$\frac{1}{h^2}(y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}) = -\varphi_i, \ i = 1,2,\cdots,N-1,$$

$$\frac{1}{h}(y_1 - y_0) = \kappa y_0 - g_0, \quad y_N = g_1; \tag{9}$$

$$\frac{1}{h^2}(y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}) = -\varphi_i, \ i = 1,2,\cdots,N-1,$$

$$\frac{1}{h}(y_1 - y_0) = \kappa y_0 - \left(g_0 + \frac{h}{2} f(0)\right), \ y_N = g_1. \tag{10}$$

我们暂时把问题 (6), (7), (9), (10) 的可解性搁置一边,先分析这些问题的逼近误差. 由关系式

$$\tilde{\Lambda} y_i = y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1} \tag{11}$$

所定义的差分算子 $\tilde{\Lambda}$ (参看 (6), (7)) 不逼近微分算子 $Lu = \frac{d^2u}{dx^2}$, 因为

$$\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)_i - \tilde{\Lambda} v_i = O(1).$$

(6) 式的右端同样不逼近 (5) 的右端. 然而微分方程 (5) 可以用差分方程 (6) 逼近, 因为在 (6) 中我们遇到的是这样的方程,将它乘以某函数后它的意义不变. 将 (6) 乘以 $\frac{1}{h^2}$, 左

端就是算子 d^2/dx^2 的逼近，而右端就是(5)式右端的逼近．如第二段所说的，对所有的函数 $v(x)\in C^{(4)}$，差分算子 $\Lambda_h=h^{-2}\tilde{\Lambda}$ 逼近微分算子 d^2/dx^2 的阶是 2．(5) 式右端的逼近是精确的．因而，如果我们把差分方程的逼近误差定义作

$$\psi(x)=L_hv+\varphi-(Lv+f),\quad x\in\omega,\qquad(12)$$

这里 v 是任一充分光滑的函数，则得到 $\psi(x)=O(h^2)$．

差分方程 (7) 乘以 h^{-2} 之后，在这种定义的意义下逼近误差也是 $O(h^2)$．但是，正如第 2 段已经指出的，逼近算子的误差阶数主要依赖于在其上进行检验的那种函数的光滑性．所以，如果在(12)中函数 $v(x)$ 的光滑性低于 $C^{(4)}$，那末，方程(6)的逼近误差就低于 $O(h^2)$．因此，$v(x)$ 的光滑性应当要求和被逼近方程(5)的解的光滑性一致．此外，在逼近问题 (5) 时，与格式的逼近误差相比较，我们更应当关心的是问题 (6) 的近似解近似于问题 (5) 的解的精度，尽管这些问题是彼此紧密相关的．

假设函数 $z(x)=y(x)-u(x)$ 是问题(5)和(6)的解在网格 ω 上的差．我们来找出网格函数 $z(x)$ 应该满足的方程．将 $y(x)=z(x)+u(x)$ 代入(6)得

$$z_{i+1}-2z_i+z_{i-1}=-h^2\varphi_i-(u_{i+1}-2u_i+u_{i-1}).\qquad(13)$$

以 h^{-2} 乘(13)式得

$$L_hz=-(\varphi+L_hu),\ \text{其中}\ L_hz=z_{\bar{x}x}.\qquad(14)$$

把 (14) 右端括号中的表达式与前面引进的逼近误差的定义 (12) 作比较，可以表明，如果原问题 (5) 的解取为(12)中的函数 $v(x)$，则上述(14)中的表达式就和(12)中的函数 $\psi(x)$ 相同．如果把表达式(14)作为逼近误差的定义，则在 $\psi(x)$ 的定义中，关于函数 $v(x)$ 的光滑性问题就自动消失．

这样，假定有一个微分方程

$$Lu=-f(x),\qquad(15)$$

在网格Ω上用差分方程

$$L_h y = -\varphi(x) \tag{16}$$

逼近．残量 $\psi(x) = L_h u + \varphi(x), x \in \Omega$，其中$u$是方程(15)的解．

我们说函数 $\psi(x)$ 是用差分方程(16)逼近方程(15)的逼近误差，如果差分算子 L_h 在充分光滑的函数类上逼近微分算子 L．

今后我们说差分方程(16)：

1）按范数$\|\cdot\|$逼近微分方程(15)，如果当 $h \to 0$ 时 $\|\psi\| = \|L_h u + \varphi\| \to 0$；

2）以阶 $n(n > 0)$ 逼近微分方程，如果$\|\psi\| = O(h^n)$或$\|\psi\| \leqslant Mh^n$，这里 $M = \text{const} > 0$ 与h无关．

当方程(5)的解充分光滑时，按照差分格式逼近误差的新定义，我们来验证格式(6)和(7)逼近的阶．

对于格式(6)，

$$\begin{aligned}\psi &= L_h u + \varphi = u_{\bar{x}x} + f \\ &= u'' + \frac{h^2}{12}u^{(4)} + f + O(h^4) = O(h^2).\end{aligned}$$

对于格式(7)，

$$\begin{aligned}\psi &= L_h u + \bar{\varphi} = u_{\bar{x}x} + f + \frac{h^2}{12}f'' \\ &= u'' + \frac{h^2}{12}u^{(4)} + f + \frac{h^2}{12}f'' + O(h^4) \\ &= (u'' + f) + \frac{h^2}{12}(u'' + f)'' + O(h^4) = O(h^4),\end{aligned}$$

因为$u'' + f = 0$．

因而，如果问题(5)的解 $u(x) \in C^{(4)}$，则格式(6)的逼近误差是 $O(h^2)$；如果问题(5)的解 $u(x) \in C^{(6)}$，则格式(7)的逼近误差是 $O(h^4)$．格式(7)比(6)逼近误差的阶高是因

为我们是在问题 (5) 的解上，而不是对任意的函数 $v(x)$ 研究逼近误差的.

显然，问题 (6) 和 (7) 的整体逼近误差(考虑到边界条件的逼近)同上面是一样的，因为边界条件是精确逼近的.

我们来计算用问题(9)和(10)逼近问题(8)的误差.显然，(9) 和 (10) 中方程的逼近误差都是 $O(h^2)$，因为它们和问题(6)的逼近没有差别. 现在研究点 $x=0$ 处边界条件的逼近误差.

对于格式 (9)，

$$\psi_r = u_{x,0} - \kappa u_0 + g_0 = u'(0) + \frac{h}{2} u''(0) - \kappa u(0) + g_0 + O(h^2) = O(h).$$

对于格式 (10)，

$$\begin{aligned}\psi_r &= u_{x,0} - \kappa u_0 + \left(g_0 + \frac{h}{2} f(0) \right) \\ &= u'(0) + \frac{h}{2} u''(0) - \kappa u(0) + g_0 \\ &\quad + \frac{h}{2} f(0) + O(h^2) \\ &= (u'(0) - \kappa u(0) + g_0) \\ &\quad + \frac{h}{2} (u''(0) + f(0)) + O(h^2) = O(h^2),\end{aligned}$$

因为

$$u'(0) = \kappa u(0) - g_0, \quad u'' + f = 0.$$

这里逼近误差阶的再次提高是因为我们在问题 (8) 的解上逼近了边界条件.

上面已经指出，差分问题的解对原微分问题的解的收敛速度问题是差分格式理论中的基本问题之一.

假设对某微分方程提出边值问题

$$Lu = -f(x), \ lu = -g(x). \tag{17}$$

它在某差分网格 $\bar{\omega}$ 上用差分问题

$$L_h y = -\varphi(x), \quad x \in \omega, \quad l_h y = -\nu(x), \quad x \in \gamma \quad (18)$$

逼近，其中 ω 是网格 $\bar{\omega}$ 内节点的集合，γ 是边界节点的集合，且 $\bar{\omega} = \omega \cup \gamma$. 我们说差分问题 (18) 的解：

1) 在网格 ω 上按范数 $\|\cdot\|_{(1h)}$ 收敛于原问题的解，如果当 $h \to 0$ 时 $\|y - u\|_{(1h)} \to 0$.

2) 按范数 $\|\cdot\|_{(1h)}$ 收敛于原问题的速度为 $O(h^n), n > 0$, 如果 $\|y - u\|_{(1h)} = O(h^n)$ （或 $\|y - u\|_{(1h)} \leqslant Mh^n$, 这里 M 是和 h 无关的正常数）.

4. 差分格式的稳定性. 上面我们介绍了格式逼近和收敛的概念. 应该再次强调：逼近误差不是在一个固定的网格上，而是在网格叙列 $\{\omega_h\}$ 上考虑的. 所以，可以认为，各处所说的不是个别差分问题的解，而是依赖于网格选择的差分问题的解叙列 $\{y^h\}$. 这里 h 是表征网格的参数. 如果网格是一维、均匀的，则 h 是一个数（网格步长）. 在一般情况下，h 是一个向量，它的模 $|h| > 0$.

为了估计格式的收敛性，必须研究当 $|h| \to 0$ 时叙列 $\{z^h = y^h - u^h\}$ 的收敛性，这里 u^h 是原问题的精确解 $u = u(x)$ 在定义于网格 ω_h 上的网格函数空间中的投影.

差分格式的稳定性概念是差分格式理论中的一个基本概念.

假设给定了某一格式

$$L_h y^h = -\varphi^h(x), \quad l_h y^h = -\nu^h(x)$$

和它的逼近误差

$$\psi^h = L_h u^h + \varphi^h, \quad \psi_\gamma^h = l_h u^h + \nu^h.$$

假设 $u = u(x)$ 充分可微，则可以得到 ψ^h 和 ψ_γ^h 关于 $|h|$ 的渐近展开. 自然选取原微分方程问题的解作为 $u = u(x)$. 然而，要判断格式的质量，只知道逼近的阶是不够的. 还必须

估计格式的精度，即误差 $z^h = y^h - u^h$ 的阶. 如果格式稳定,这个估计式是可以得到的.

我们来给出格式稳定性的定义.

假设 y_1^h 和 y_2^h 是问题(18)相应于右端 φ_1^h, ν_1^h 和 φ_2^h, ν_2^h 的解. 格式 (18) 称为稳定的,如果存在既不依赖于网格 ω_h (向量参数 h) 也不依赖于右端选取的正常数 M_1, M_2 和 h_0, 使得当 $|h| \leqslant h_0$ 时成立不等式

$$\|y_2^h - y_1^h\|_{(1h)} \leqslant M_1\|\varphi_2^h - \varphi_1^h\|_{(2h)} + M_2\|\nu_2^h - \nu_1^h\|_{(3h)}, \quad (19)$$

这里 $\|\cdot\|_{(1h)}$, $\|\cdot\|_{(2h)}$, $\|\cdot\|_{(3h)}$ 是定义在网格 ω_h 上的网格函数集合中引进的一些范数. 差分格式的稳定性意味着，问题(18)的解 $\{y^h\}$ 关于 h 是一致地连续依赖于右端 (初始数据) $\{\varphi^h, \nu^h\}$, 因此,若初始数据变化很小,则相应的解的变化也很小.

如果格式 (18) 对任意可能的右端(初始数据) $\{\varphi^h, \nu^h\}$ 都可解并且稳定,就说差分问题 (18) 提法适定或格式 (18) 适定. 如果格式适定，则它有唯一的解. 事实上，如果问题 (18) 有两个解 y_1^h 和 y_2^h, 对应于相同的初始数据 $\{\varphi^h, \nu^h\}$, 因而，$\varphi_1^h = \varphi_2^h = \varphi^h$, $\nu_1^h = \nu_2^h = \nu^h$. 于是从 (19) 推知:

$$\|y_2^h - y_1^h\|_{(1h)} \leqslant M_1\|0\|_{(2h)} + M_2\|0\|_{(3h)} = 0, \text{ 即 } y_1^h \equiv y_2^h.$$

定义稳定性 (19) 时并没有假定方程 (18) 是线性的. 假设格式 (18) 是线性的,则 $y^h \equiv 0$ 就是当 $\varphi^h = \nu^h \equiv 0$ 时问题的解. 令 (19) 中的 $y_1^h = y^h$, $\varphi_1^h = \varphi^h$, $\nu_1^h = \nu^h$ 且 $y_2^h = \varphi_2^h = \nu_2^h = 0$, 我们看到,线性格式的稳定性意味着成立先验估计

$$\|y^h\|_{(1h)} \leqslant M_1\|\varphi^h\|_{(2h)} + M_2\|\nu^h\|_{(3h)}. \quad (20)$$

在本书中我们只讨论线性格式. 差分格式 (18) 的稳定性研究,实际上归结为寻找形如 (20) 的先验估计.

如果格式稳定,则不难得到用逼近误差

$$\psi^h(x) = L_h u^h + \varphi^h, \quad x \in \omega_h;$$
$$\psi_\gamma^h = l_h u^h + \nu^h, \quad x \in \gamma_h$$
表示的解之误差
$$z^h(x) = y^h(x) - u^h(x)$$
的估计式，其中 $y^h(x)$ 是问题 (18) 的解，而 $u(x)$ 是原问题 (17) 的解．事实上，解 $u = u(x)$ 满足条件
$$L_h u^h = -(\varphi^h - \psi^h), \quad l_h u^h = -(\nu^h - \psi_\gamma^h).$$
然后令 $y_1^h = y^h$，$\varphi_1^h = \varphi^h$，$\nu_1^h = \nu^h$，$y_2^h = u^h$，$\varphi_2^h = \varphi^h - \psi^h$，$\nu_2^h = \nu^h - \psi_\gamma^h$ 并利用表示格式 (18) 稳定性的估计式 (19)，得到
$$\|y^h - u^h\|_{(1h)} \leqslant M_1\|\psi^h\|_{(2h)} + M_2\|\psi_\gamma^h\|_{(3h)}. \tag{21}$$
在线性格式情况下，我们得到关于误差 z^h 的问题
$$L_h z^h = -\psi^h, \ x \in \omega, \quad l_h z^h = -\psi_\gamma^h, \ x \in \gamma,$$
它类似于问题 (18)；对此，立即可利用估计式 (19) 而得到 (21).

由估计式 (21) 得出结论：如果格式 (18) 稳定并且逼近问题 (17)，则此格式当 $|h| \to 0$ 时收敛．实际上，如果当 $|h| \to 0$ 时 $\|\psi^h\|_{(2h)} \to 0$ 又 $\|\psi_\gamma^h\|_{(3h)} \to 0$，则当 $|h| \to 0$ 时 $\|y^h - u^h\|_{(1h)} \to 0$.

由估计式 (21) 看出，格式 (18) 的精度的阶取决于逼近的阶．为使格式收敛，例如速度为 $O(|h|^m)$，$m > 0$（精度为 $O(|h|^m)$），只需它具有同阶的逼近（在问题 (17) 的解 $u = u(x)$ 上），即
$$\|\psi^h\|_{(2h)} = O(|h|^m), \quad \|\psi_\gamma^h\|_{(3h)} = O(|h|^m).$$

格式稳定性的证明归结为得到先验估计(19)或(20)．在三、五、六各章中我们将就逼近二阶和四阶椭圆型方程的差分格式，利用不同的范数 $\|\cdot\|_{(\alpha_h)}$，$\alpha = 1, 2, 3$，得出这种类型的估计式．例如在第三章中利用最大值原理研究稳定性，其

先验估计包含有网格范数 C，

$$\|y^h\|_{(1h)} = \max_{x \in \omega_h} |y^h(x)|,$$

$$\|\nu^h\|_{(3h)} = \max_{x \in \gamma} |\nu^h(x)|,$$

$$\|\varphi^h\|_{(2h)} = \|\varphi^h\|_{(1h)}.$$

§2. 构造差分格式的原则

1. 对差分格式所提的要求. 上一节已就一阶和二阶微分算子以及边界条件含有一阶导数的二阶微分方程引进了差分逼近的例子，并讨论了一些最简单的例子.

对于变系数微分方程，构造差分格式的问题相当复杂. 在给定的模式上可以构造无限多个具有相同逼近阶的格式. 例如，对于微分方程

$$\frac{d^2u}{dx^2} - q(x)u = -f(x), \tag{1}$$

可以在三点模式 (x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) 上构造单参数格式族

$$L_h y_i = \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} - d_i y_i = -f_i, \tag{2}$$

$$d_i = \alpha q_{i-1} + (1-2\alpha)q_i + \alpha q_{i+1},\ q_i = q(x_i),$$

它们对任意的参数值 α 都有二阶逼近 $\psi = L_h u + f = O(h^2)$. 公式 (2) 中 y_i 的系数 d_i 可以加上 βh^2 而不破坏逼近阶，其中 β 是任意常数. 这样就产生了在给定的模式上具有同样逼近阶的所有可能的差分格式集合中选择差分格式的问题. 为此，必须对差分格式提出一些要求. 任何一种近似方法都应当用有限的运算次数 $Q(\varepsilon)$ (用有限的机器时间)算出具有给定精度 ε 的数值解. 自然应该力求运算次数 $Q(\varepsilon)$ 为最少，即力求找到经济的数值方法.

数学物理问题的数值解法分两步： 1) 列出逼近微分方

程问题的网格方程组（差分格式），2）求解该网格方程组.

我们在本书中只研究如何构造差分格式. 然而，应当考虑到为求得网格解所需要花费的计算工作量，这不仅和网格方程组的结构有关，也和方程组的阶有关.

对于方程组的一种固定解法而言，方程组的阶越低(网格步长大些)计算量就越小. 然而，网格节点减少将导致格式精度降低. 所以最好是使格式具有尽可能高阶的精度（依赖于微分方程系数、初始和边界条件的光滑性）. 实际上这意味着应该寻找具有最小模式，并且当微分方程的解充分光滑时在这种模式上具有最大可能逼近阶的格式. 应该在选定的模式上给出原始格式族，并在该族上寻找某种意义下"最佳"的格式. "最佳格式"这一术语需要加以定义. 应当对格式提出能确定通常所说的格式质量的要求.

不但要指出格式的定量特征，还要指出它的定性特征:

a）格式应当是一致的，即对于所讨论的K类中之任意问题和任意网格，每个节点上的网格方程都应该按照同一规律统一写出. 问题的类K由微分方程以及它的系数所属的函数空间来确定.

b）对于任意可取的网格和K类中的任意问题，差分方程组都应是可解的.

c）对于K类中的任意问题，格式应当收敛.

这些要求确定了可取的原始差分格式族. 然后，我们对格式提些补充要求:

(1) 有一定的逼近阶(例如，在光滑解的集合 $\overline{K}\subseteq K$ 上，$\psi = O(h^2)$)，

(2) 在问题的整个K类上有最大的精度，

(3) 经济性，即用机器解网格方程组时运算次数最少.

我们将从原始格式族中选出某个"最佳格式"的集合. 寻

求这些最佳格式就是理论的目标．其次，我们将仔细地讨论差分格式的一致性概念．

2. 一致差分格式．我们来讨论单变量函数的情况．假设

$$\omega_h=\{x_i=ih,\quad i=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$$

是数轴$-\infty<x<\infty$上的网格，$k(x)$是微分方程系数的向量函数．例如，对于方程

$$\frac{d}{dx}\left(k_1(x)\frac{du}{dx}\right)-k_2(x)u=-k_3(x),$$

显然，向量

$$k(x)=\{k_1(x),\ k_2(x),\ k_3(x)\}$$

的分量是$k_1(x)$，$k_2(x)$，$k_3(x)$．

格式的一致性意味着，它的系数是微分方程系数的泛函，这些泛函依赖于作为参数的步长h而与网格的节点和系数$k(x)$的选择无关．

假设给出整数模式

$$Ш=\{-m_1,-m_1+1,\cdots,-1,0,1,\cdots,m_2\},$$

其中$m_1>0$，$m_2>0$都是整数，在它上面定义了网格函数$\bar{y}(j)$，$j\in Ш$，又给出模式$\Sigma=\{-m_1\leqslant s\leqslant m_2\}$，在它上面定义了向量函数$\bar{k}(s)$（为简单起见，我们认为模式Ш和$\Sigma$的端点重合）．

用$A_j^h[\bar{k}(s)]$，$F^h[\bar{k}(s)]$，$j\in Ш$，$s\in\Sigma$表示模式泛函．

考虑泛函

$$\Phi^h[\bar{y}(j)]=\sum_{j=-m_1}^{m_2}A_j^h[\bar{k}(s)]\bar{y}^h(j)+F^h[\bar{k}(s)],$$

并由此过渡到一致格式．令

$$\bar{y}(j)=y^h(x_i+jh),$$
$$\bar{k}(s)=k(x_i+sh),$$

并利用Φ^h的表达式，我们得到一致差分格式

$$(L_h y^h + F^h)_i = \sum_{j=-m_1}^{m_2} A_j^h[k(x_i + sh)]y^h(x_i + jh)$$
$$+ F^h[k(x_i + sh)] = 0,$$

其中 $y^h(x_i)$ 是网格函数，$k(x)$ 是连续变量 x 的向量函数.

如果给定了模式泛函

$A_j^h[\bar{k}(s)]$ 和 $F^h[\bar{k}(s)]$，$j = -m_1, -m_1 + 1, \cdots, m_2$，

则一致格式族也就给定了. 这些泛函要根据格式的可解性，一定的逼近阶和经济性的要求来选择.

我们以问题

$$\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}\right) - q(x)u = -f(x), \quad 0 < x < 1, \tag{3}$$
$$u(0) = \mu_1,\ u(1) = \mu_2,\ k(x) > 0,\ q(x) \geqslant 0$$

的三点格式为例来阐明一致性的概念.

考虑网格 $\bar{\omega}_h = \{x_i = ih,\ i = 0, 1, \cdots, N,\ h = 1/N\}$ 上的三点模式 (x_{i-1}, x_i, x_{i+1})，因而 Ш $= \{-1, 0, 1\}$ 且 $m_1 = m_2 = 1$. 假设系数模式 $\Sigma = \{-1 \leqslant s \leqslant 1\}$; $A^h[\bar{k}(s)]$, $B^h[\bar{k}(s)]$, $F^h[\bar{k}(s)]$, $-1 \leqslant s \leqslant 1$ 是模式泛函.

考虑一致差分格式

$$\frac{1}{h}\left[b_i \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - a_i \frac{y_i - y_{i-1}}{h}\right] - d_i y_i = -\varphi_i,$$
$$i = 1, 2, \cdots, N - 1, \tag{4}$$
$$y_0 = \mu_1, \quad y_N = \mu_2,$$

它的系数定义在所有节点 $x_i \in \omega$ 上并且对任意的 $k(x), q(x)$ 和 $f(x)$ 都同样定义:

$$a_i = A^h[k(x_i + sh)], \quad b_i = B^h[k(x_i + sh)],$$
$$d_i = F^h[q(x_i + sh)], \quad \varphi_i = F^h[f(x_i + sh)]. \tag{5}$$

为简单起见我们假设 (参看 (5))，差分方程的每个系数仅依赖于微分方程相应的系数. 在一般情况下，A^h, B^h, F^h 是非

线性泛函.

假设 $u(x)$ 是问题 (3) 的解. 格式 (4) 的逼近误差定义为残量

$$\psi_i = \frac{1}{h}\left[b_i \frac{u_{i+1} - u_i}{h} - a_i \frac{u_i - u_{i-1}}{h}\right] - d_i u_i + \varphi_i. \quad (6)$$

假设 $u(x)$ 充分光滑,将 u_{i+1} 展开为 h 的幂级数,并用 $\rho_i(h)$ 表示依赖于 x_i 且当 $h \to 0$ 时趋近于零的任意表达式,则得到

$$u_{i+1} = u_i + hu_i' + \frac{h^2}{2}u_i'' + h^2\rho_i(h),$$

$$u_{i-1} = u_i - hu_i' + \frac{h^2}{2}u_i'' + h^2\rho_i(h),$$

$$\psi_i = \frac{b_i + a_i}{2}u_i'' + \frac{b_i - a_i}{h}u_i' - d_i u_i + \varphi_i + \rho_i(h).$$

与方程

$$ku'' + k'u' - qu + \varphi = 0$$

比较可以看出，如果条件

$$\frac{b_i + a_i}{2} = k_i + \rho_i(h),$$

$$\frac{b_i - a_i}{h} = k_i' + \rho_i(h), \quad (7)$$

$$d_i = q_i + \rho_i(h), \quad \varphi_i = f_i + \rho_i(h)$$

能够满足，则

$$\psi_i = \left(\frac{b_i + a_i}{2} - k_i\right)u_i'' + \left(\frac{b_i - a_i}{h} - k_i'\right)u_i'$$
$$- (d_i - q_i)u_i + \varphi_i - f_i + \rho_i(h),$$

即当 $h \to 0$ 时

$$\psi_i = \rho_i(h) \to 0.$$

今后我们总是假设模式泛函 A, B, F 是线性的并与参数 h 无

关. 利用展式

$$k(x+sh)=k(x)+shk'(x)+h\rho(h),$$
$$q(x+sh)=q(x)+\rho(h),$$
$$f(x+sh)=f(x)+\rho(h),$$

得到

$$a_i=A[1]k_i+hk'_iA[s]+h\rho(h),$$
$$b_i=B[1]k_i+hk'_iB[s]+h\rho(h),$$
$$d_i=F[1]q_i+\rho(h),\ \varphi_i=F[1]f_i+\rho(h).$$

将这些表达式代入条件 (7) 得到

$$A[1]=B[1]=F[1]=1, B[s]-A[s]=1. \tag{8}$$

如果这些条件成立，则格式 (4) 具有逼近性，即当 $h\to 0$ 时 $\psi=\rho(h)\to 0$.

对格式 (4)，二阶逼近的要求归结为条件

$$\frac{b_i+a_i}{2}=k_i+O(h^2),\quad \frac{b_i-a_i}{h}=k'_i+O(h^2),$$
$$d_i=q_i+O(h^2),\qquad \varphi_i=f_i+O(h^2). \tag{9}$$

要证明这点，只要将

$$u_{i\pm 1}=u_i\pm hu'_i+\frac{h^2}{2}u''_i\pm\frac{h^3}{6}u'''_i+\frac{h^4}{24}u_i^{(4)}+h^4\rho(h)$$

代入 ψ 的表达式并要求 $\psi_i=O(h^2)$ 即可. 和上面进行的讨论类似，可以证明，除 (8) 式外，由 (9) 应得出条件

$$B[s^2]=A[s^2],\quad F[s]=0. \tag{10}$$

将差分方程组 (4) 改写成

$$a_iy_{i-1}-c_iy_i+b_iy_{i+1}=-h^2\varphi_i,$$
$$0<i<N,\quad y_0=\mu_1,\quad y_N=\mu_2, \tag{11}$$
$$c_i=a_i+b_i+h^2d_i,$$

如果对所有的 $i=1,2,\cdots,N-1$ 都有

$$a_i>0,\ b_i>0,\ c_i-(a_i+b_i)=h^2d_i>0, \tag{12}$$

则(4)式可解性的要求得到满足．在这种情况下，大家知道，解 y_i 可用追赶法求得．因为 $k(x)>0$，$q(x)\geqslant 0$，所以只需要求泛函 A, B 和 F 是正的，即当 $\bar{k}(s)>0$ 时

$$A[\bar{k}(s)]>0, \quad B[\bar{k}(s)]>0, \quad F[\bar{k}(s)]>0.$$

这时对于任意的 $k(x)>0$ 和 $q(x)\geqslant 0$ 都有 $a_i>0$，$b_i>0$ 和 $d_i\geqslant 0$.

在最简单的情况下，A, B（和 F）是模式 $\Sigma=\{-1\leqslant s\leqslant 1\}$ 的有限个点上函数值 $\bar{k}(s)(\bar{f}(s))$ 的线性组合，例如，

$$\begin{aligned} A[\bar{k}(s)] &= \alpha_{-1}\bar{k}(-1)+\alpha_0\bar{k}(0)+\alpha_1\bar{k}(1), \\ B[\bar{k}(s)] &= \beta_{-1}\bar{k}(-1)+\beta_0\bar{k}(0)+\beta_1\bar{k}(1) \end{aligned} \tag{13}$$

等，因而

$$\begin{aligned} a_i &= \alpha_{-1}k_{i-1}+\alpha_0 k_i+\alpha_1 k_{i+1}, \\ b_i &= \beta_{-1}k_{i-1}+\beta_0 k_i+\beta_1 k_{i+1} \end{aligned} \tag{14}$$

（如果 $k(x)$ 是连续函数）．若

$$\alpha_j\geqslant 0, \quad \beta_j\geqslant 0, \quad j=-1,0,1, \tag{15}$$

则可解性条件(12)满足．逼近条件(8)给出

$$\begin{aligned} &\alpha_{-1}+\alpha_0+\alpha_1=1, \quad \beta_{-1}+\beta_0+\beta_1=1, \\ &\beta_1-\beta_{-1}=1+\alpha_1-\alpha_{-1}. \end{aligned} \tag{16}$$

由规范条件 $\alpha_{-1}+\alpha_0+\alpha_1=1$ 和 $\alpha_j\geqslant 0$ 推知 $0\leqslant\alpha_j\leqslant 1$，类似地有

$$0\leqslant\beta_j\leqslant 1, \quad j=-1,0,1. \tag{17}$$

现在来验证二阶逼近的条件(10)．因为 $A[s^2]=\alpha_{-1}+\alpha_1$，$B[s^2]=\beta_{-1}+\beta_1$，则

$$\beta_1+\beta_{-1}=\alpha_1+\alpha_{-1} \text{ 或 } \beta_0=\alpha_0. \tag{18}$$

对于六个参数 $\alpha_j, \beta_j, j=-1,0,1$，我们得到了四个条件；两个参数 α_1 和 α_{-1} 仍为任意，而 $\alpha_0=1-(\alpha_1+\alpha_{-1})$，$\beta_{-1}=\alpha_{-1}-0.5$，$\beta_1=0.5+\alpha_1$，$\beta_0=\alpha_0$.

3. 守恒差分格式．除了可解性、一定的逼近阶、计算方法

的经济性这些形式上的要求之外（这些要求满足与否可以直接验证），在选择格式时，还必须保证一个最重要的要求——当网格步长趋于零时，格式以一定的速度收敛．判定这个性质并不总是那么简单，特别是对间断系数的方程和非线性方程．

在 §1 中已经证明，差分格式的收敛性是稳定性和逼近性的结果：如果格式稳定并具有逼近性，它就一定收敛．我们提醒一下，稳定性表示差分问题的解连续（关于网格选择是一致地）依赖于方程的右端和边界条件．

对第一边值问题，我们得到关于误差 $z=y-u$ 的非齐次方程，它的右端是逼近误差，而边界条件是齐次的，其中 u 是原微分方程的解，y 是相应差分问题的解．如果格式稳定，则 z 可通过 ψ 来估计，并且当格式具有逼近性时，由这个估计式可以推出它在逐步加密的网格叙列上的收敛性．然而知道格式的渐近性质，如收敛性，对于在机器计算中实际使用的固定网格上事先判断误差的大小是不够的．根据计算方法经济性的要求，实际应用的网格不可能太细．所以，上面指出的先验估计

$$\|z\|_{(1)} \leqslant M\|\psi\|_{(2)} \leqslant \bar{M}h^2$$

是相当粗糙的；同时它还包含有解 $u(x)$ 的导数（例如四阶）估计．为了在实用网格上得出好的近似，正如实践表明的那样，必须利用能很好反映微分方程基本性质的格式．

数学物理方程通常是用微分形式表示守恒律（能量、热量、质量、电荷等）．例如，方程

$$\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}\right)=-f(x),\quad 0<x<1, \qquad (19)$$

可以解释作在热传导系数为 $k(x)$ 的细杆 $0<x<1$ 上温度 $u(x)$ 定常（不随时间变化）分布的方程．将这个方程对 x 从 $x^{(1)}$

到 $x^{(2)}$ 积分，得到线段 $x^{(1)} \leqslant x \leqslant x^{(2)}$ 上的热量守恒律

$$W(x^{(2)}) - W(x^{(1)}) = \int_{x^{(1)}}^{x^{(2)}} f(x)dx,$$

$$W(x) = -k(x)\frac{du}{dx}. \tag{20}$$

左端是线段端点处热流量之差，右端是所产生（消耗）的热量.

为了用离散模型能正确地描述物理过程的进程，自然应该力求使该离散模型在网格上能正确地反映该过程的基本性质，首先就是守恒律. 在网格上表现守恒律的差分格式称为守恒差分格式. 我们以方程

$$(k(x)u')' = -f(x), \quad 0 < x < 1,$$
$$u(0) = \mu_1, \quad u(1) = \mu_2$$

的三点格式 (4) 为例阐明守恒性的涵义. 这个格式的形式为

$$\frac{1}{h}\left(b_i\frac{y_{i+1} - y_i}{h} - a_i\frac{y_i - y_{i-1}}{h}\right) = -\varphi_i, \tag{21}$$

把它改写成

$$\frac{1}{h}\left(a_{i+1}\frac{y_{i+1} - y_i}{h} - a_i\frac{y_i - y_{i-1}}{h}\right)$$
$$= -\varphi_i - \frac{b_i - a_{i+1}}{h}\frac{y_{i+1} - y_i}{h},$$

我们确信，恒等式

$$W^h_{i_2+1} - W^h_{i_1} = \sum_{i=i_1}^{i_2} h\varphi_i + \sum_{i=i_1}^{i_2}(b_i - a_{i+1})\frac{y_{i+1} - y_i}{h} \tag{22}$$

是线段 $x^{(1)} = i_1h \leqslant x \leqslant x^{(2)} = i_2h$ 上恒等式 (20) 的差分模拟，这里

$$W^h_i = -a_i\frac{y_i - y_{i-1}}{h}.$$

右端包含有平衡差值

$$D = \sum_{i=i_1}^{i_2} (b_i - a_{i+1}) \frac{y_{i+1} - y_i}{h},$$

只有当

$$b_i = a_{i+1} \tag{23}$$

时它对任意的网格函数 y_i 才等于零．这时我们得到格式

$$\frac{1}{h}\left(a_{i+1}\frac{y_{i+1} - y_i}{h} - a_i \frac{y_i - y_{i-1}}{h}\right) = -\varphi_i \tag{24}$$

和代替 (22) 的网格守恒律

$$W_{i_2+1}^h - W_{i_1}^h = \sum_{i=i_1}^{i_2} h\varphi_i,$$

它是差分方程 (24) 的代数结果．格式 (24) 是守恒的，而条件 (23) 是守恒性的充要条件．在所讨论的情况下，差分格式的守恒性和给定在网格

$$\omega_h = \{x_i = ih,\ i = 0,1,2,\cdots,N,\ h = 1/N\}$$

上并在边界上(当 $i = 0, N$ 时)等于零的网格函数空间中差分算子

$$\Lambda y_i = \frac{1}{h}\left(a_{i+1}\frac{y_{i+1} - y_i}{h} - a_i \frac{y_i - y_{i-1}}{h}\right)$$

的自共轭性是一致的．

4. 守恒性作为间断系数类中一致格式收敛性的必要条件． 为了判明守恒性的要求是合理的，我们来证明，某一族一致格式的守恒性是该格式在间断系数类中收敛的必要条件，即由格式的收敛性可推出它的守恒性．首先我们看到，既然说的是条件的必要性，那么就可以只研究最简单问题的格式，例如

$$\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}\right) = 0,\ 0 < x < 1,\ u(0) = 1,\ u(1) = 0, \tag{25}$$

其中 $k(x)$ 是分段常数的函数

$$k(x)=\begin{cases}k_1, & 0<x<\xi,\\ k_2, & \xi<x<1.\end{cases}$$

在间断点 $x=\xi$ 满足通常的联结条件

$$[u]=u(\xi+0)-u(\xi-0)=0,$$

$$[ku']=k_2u'(\xi+0)-k_1u'(\xi-0)=0.$$

显然，这个问题有分段线性函数的解

$$u(x)=\begin{cases}1-\gamma_0x, & 0\leqslant x\leqslant\xi,\\ \delta_0(1-x), & \xi\leqslant x\leqslant 1,\end{cases}\tag{26}$$

这里 γ_0 和 δ_0 由联结条件 $1-\gamma_0\xi=\delta_0(1-\xi)$，$k_1\gamma_0=k_2\delta_0$ 确定，因而

$$\delta_0=\frac{k_1}{k_2}\gamma_0,\quad \gamma_0=\frac{1}{\Delta_0},\quad \Delta_0=\xi+\frac{k_1}{k_2}(1-\xi).\tag{27}$$

假设 $\xi=x_n+\theta h$，$0\leqslant\theta\leqslant 1$.

我们考察相应的一致差分格式

$$\frac{1}{h}\left[b_i\frac{y_{i+1}-y_i}{h}-a_i\frac{y_i-y_{i-1}}{h}\right]=0,$$

$$i=1,2,\cdots,N-1,\quad y_0=1,\quad y_N=0,\tag{28}$$

其中

$$a_i=A[k(x_i+sh)],\ b_i=B[k(x_i+sh)],\ -1\leqslant s\leqslant 1.$$

假设格式 (28) 逼近问题 (25)；这时条件 (8) 满足:

$$B[1]=A[1]=1,\quad B[s]-A[s]=1.$$

因为当 $x\leqslant x_n$ 时 $k(x)=k_1$，当 $x\geqslant x_{n+1}$ 时 $k(x)=k_2$，则当 $0<i<n$ 时 $a_i=b_i=k_1$，当 $n+1<i<N$ 时 $a_i=b_i=k_2$，差分方程 (28) 可以写成:

$$y_{i-1}-2y_i+y_{i+1}=0\ \text{当}\ 0<i<n\ \text{和}\ n+1<i<N,$$

$y_0=1$，$y_N=0$，

$$b_n(y_{n+1}-y_n)-a_n(y_n-y_{n-1})=0,$$

$$b_{n+1}(y_{n+2}-y_{n+1})-a_{n+1}(y_{n+1}-y_n)=0.$$

由这些方程可以推知，当 $0\leqslant i\leqslant n$ 时 $y_i=1-\gamma x_i$，当 $n+1\leqslant i\leqslant N$ 时 $y_i=\delta(1-x_i)$，其中系数 γ 和 δ 由 $i=n, n+1$ 时的方程确定.

由 $i=n$ 和 $i=n+1$ 时的方程中消去差 $y_{n+1}-y_n$，得到

$$\delta=\frac{a_n a_{n+1}}{b_n b_{n+1}}\gamma.$$

将它代入 $i=n$ 的方程，得到

$$\gamma=\frac{1}{ha_n/b_n+x_n+(1-x_{n+1})a_n a_{n+1}/(b_n b_{n+1})}.$$

利用线性插值我们在所有的点 $x\in[0,1]$ 上定义函数

$$\tilde{y}(x,h)=y_i+\frac{x-x_i}{h}(y_{i+1}-y_i),\quad x_i\leqslant x\leqslant x_{i+1}.$$

于是有

$$\tilde{y}(x,h)=\begin{cases}1-\gamma x, & 0\leqslant x\leqslant\xi,\\ \delta(1-x), & \xi\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}\tag{29}$$

假定差分格式在 C 中收敛，则当 $h\to 0$ 时

$$|\tilde{y}(x,h)-u(x)|\to 0.$$

将 $\tilde{y}(x,h)$ 的表达式和 $u(x)$ 的公式比较便知：当 $h\to 0$ 时，$\gamma\to\gamma_0$，$\delta\to\delta_0$. 当 $h\to 0$ 时在 γ 的公式中取极限，我们看到，只有在条件

$$R_n=\frac{b_n b_{n+1}}{k_2}-\frac{a_n a_{n+1}}{k_1}\to 0,\ 当\ h\to 0\tag{30}$$

满足时，$\lim\limits_{h\to 0}\gamma=\gamma_0$. 这正是格式(28)收敛的必要条件.

利用第二段公式(14)定义了线性模式泛函 A 和 B 之后，现在我们给出原始格式族，因而

$$\begin{aligned}a_i&=\alpha_{-1}k_{i-1}+\alpha_0 k_i+\alpha_1 k_{i+1},\\ b_i&=\beta_{-1}k_{i-1}+\beta_0 k_i+\beta_1 k_{i+1}.\end{aligned}\tag{14}$$

从这个(线性、“离散”的)格式族中选出在间断系数 $k(x)$ 的函数类中收敛的格式集合，并证明它们也是守恒的．因为格式具有逼近性，所以系数 α_k 和 β_k 满足条件(16)，为方便起见，把它们重写出来：

$$\alpha_{-1}+\alpha_0+\alpha_1=1,\ \beta_{-1}+\beta_0+\beta_1=1, \tag{31}$$

$$\beta_1-\beta_{-1}=1+\alpha_1-\alpha_{-1}. \tag{32}$$

计算当 $i=n,\ n+1$ 时的 a_i, b_i,

$$a_n=(\alpha_{-1}+\alpha_0)k_1+\alpha_1k_2=(1-\alpha_1)k_1+\alpha_1k_2,$$

$$b_n=(1-\beta_1)k_1+\beta_1k_2,$$

$$a_{n+1}=\alpha_{-1}k_1+(\alpha_0+\alpha_1)k_2=\alpha_{-1}k_1+(1-\alpha_{-1})k_2,$$

$$b_{n+1}=\beta_{-1}k_1+(1-\beta_{-1})k_2.$$

我们讨论差式 R_n．它与 h 无关，因而条件(30)对任意的 h 都可以换成等式 $R_n=0$．将 R_n 乘以 k_1/k_2^2 并记 $t=k_1/k_2$，则得

$$t((1-\beta_1)t+\beta_1)(\beta_{-1}t+(1-\beta_{-1}))$$
$$-((1-\alpha_1)t+\alpha_1)(\alpha_{-1}t+(1-\alpha_1))=0$$

或

$$(1-\beta_1)\beta_{-1}t^3+[\beta_1\beta_{-1}+(1-\beta_1)(1-\beta_{-1})-\alpha_{-1}(1-\alpha_1)]t^2$$
$$+[\beta_1(1-\beta_{-1})-\alpha_1\alpha_{-1}-(1-\alpha_1)(1-\alpha_{-1})]t$$
$$-\alpha_1(1-\alpha_{-1})=0.$$

由于 t 的任意性，t 的各次幂的系数都等于零：

$$(1-\beta_1)\beta_{-1}=0,\quad (1-\alpha_{-1})\alpha_1=0,$$
$$\beta_1\beta_{-1}+(1-\beta_1)(1-\beta_{-1})-\alpha_{-1}(1-\alpha_1)=0, \tag{33}$$
$$\beta_1(1-\beta_{-1})-\alpha_1\alpha_{-1}-(1-\alpha_{-1})(1-\alpha_1)=0.$$

后两式是条件(32)与(33)第一式的推论．考虑到条件(15)，则方程组(31)—(33)有非负解

$$\beta_{-1}=\alpha_1=0,\ \alpha_{-1}=\beta_0=1-\alpha_0,\ \beta_1=\alpha_0,\ 0\leqslant\alpha_0\leqslant 1.$$

这是一个单参数族．事实上，假定 $\alpha_1=\beta_{-1}=0$，则由(31)，

(32) 得到 $\beta_1 = 1 - \alpha_{-1} = \alpha_0$，$\beta_0 = 1 - \beta_1 = 1 - \alpha_0$.

如果令 $\beta_{-1} = 0$，$\alpha_{-1} = 1$，则根据条件 (15) 得到上述解当 $\alpha_0 = 0$ 的特殊情况. 对方程组 (33) 的其它解也可类似地研究. 考虑到已经求出的方程组 (31)—(33) 的解和条件 (15),则有

$$a_i = (1 - \alpha_0)k_{i-1} + \alpha_0 k_i,$$
$$b_i = (1 - \alpha_0)k_i + \alpha_0 k_{i+1}, \tag{34}$$

即 $b_i = a_{i+1}$.

这样我们就证明了，如果原始族 (28), (14), (15) 中的某格式在分段连续系数类中收敛，那末它就是守恒的并且可以写成

$$\Lambda y = \frac{1}{h}\left(a_{i+1}\frac{y_{i+1} - y_i}{h} - a_i\frac{y_i - y_{i-1}}{h}\right) = 0,$$
$$i = 1, 2, \cdots, N - 1, \tag{35}$$

其中

$$a_i = (1 - \alpha_0)k_{i-1} + \alpha_0 k_i, \quad 0 \leqslant \alpha_0 \leqslant 1,$$

α_0 是任意参数. 显然，该格式对任意的 α_0 有一阶逼近，而当 $\alpha_0 = 0.5$，即当 $a_i = 0.5(k_{i-1} + k_i)$ 时有二阶逼近. 在间断系数类中相应于方程 (3) 的格式

$$\Lambda y_i = \frac{1}{h}\left[a_{i+1}\frac{y_{i+1} - y_i}{h} - a_i\frac{y_i - y_{i-1}}{h}\right] - d_i y_i = -\varphi_i,$$
$$i = 1, 2, \cdots, N - 1, \quad y_0 = \mu_1, \quad y_N = \mu_2$$

的守恒性不仅是收敛的必要条件，而且也是充分条件. 充分性的证明我们不去讨论了.

作为例子,我们引进一个非守恒格式,它是由方程

$$Lu = (ku')' - qu = ku'' + k'u' - qu = -f$$

的每一项用 h 的二阶逼近得到的结果. 这种自然的逼近产生格式

$$k_i \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + \frac{k_{i+1} - k_{i-1}}{2h} \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} - q_i y_i = -f_i,$$

$$i = 1, 2, \cdots, N-1. \tag{36}$$

把它写成

$$\frac{1}{h}\left[b_i \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - a_i \frac{y_i - y_{i-1}}{h}\right] - d_i y_i = -\varphi_i,$$

其中

$$d_i = q(x_i), \quad \varphi_i = f(x_i),$$

$$a_i = k_i - \frac{1}{4}(k_{i+1} - k_{i-1}),$$

$$b_i = k_i + \frac{1}{4}(k_{i+1} - k_{i-1}).$$

由此可见，$b_i \neq a_{i+1}$，即格式(36)是非守恒的. 和(28)式比较可以看出，格式(36)相应于参数值

$$\alpha_{-1} = \frac{1}{4}, \quad \alpha_0 = 1, \quad \alpha_1 = -\frac{1}{4},$$

$$\beta_{-1} = -\frac{1}{4}, \quad \beta_0 = 1, \quad \beta_1 = \frac{1}{4}.$$

这个格式，一般说来，是不可解的. 如果要求满足条件

$$k_i > \frac{1}{4}|k_{i+1} - k_{i-1}|,$$

则格式可解. 特别地，对于问题(36)有

$$a_n > 0, \quad b_n > 0, \quad a_{n+1} > 0, \quad b_{n+1} > 0,$$

$$\text{当} \frac{1}{5} < \frac{k_1}{k_2} < 5.$$

将表达式

$$a_n = \frac{5k_1 - k_2}{4}, \quad b_n = \frac{3k_1 + k_2}{4},$$

$$a_{n+1} = \frac{3k_2 + k_1}{4}, \quad b_{n+1} = \frac{5k_2 - k_1}{4}$$

代入

$$R_n=\frac{b_n b_{n+1}}{k_2}-\frac{a_n a_{n+1}}{k_1}=0,$$

得到等式 $(k_2-k_1)^3=0$，这只有当 $k_1=k_2$ 时才能成立. 因而格式 (36) 在分段连续系数类中发散.

§ 3. 构造差分格式的方法

1. 积分-插值法（均衡法）. 我们考察对变系数微分方程

$$Lu\equiv(k(x)u')'-q(x)u(x)=-f(x) \tag{1}$$

构造差分格式的例子.

我们把方程 (1) 看作细杆上定常热量分布的方程. 对这样的方程,成立热量守恒律(平衡方程),它在线段$[x^{(1)},x^{(2)}]$上的形式为

$$W(x^{(1)})-W(x^{(2)})-\int_{x^{(1)}}^{x^{(2)}}q(x)u(x)dx+\int_{x^{(1)}}^{x^{(2)}}f(x)dx=0, \tag{2}$$

这可以对方程 (1) 沿线段 $[x^{(1)},x^{(2)}]$ 积分得出. 这里

$$W(x)=-k(x)\frac{du}{dx}$$

是热流量，$k(x)>0$ 是热传导系数，$u(x)$ 是温度.

我们用平衡方程 (2) 来写方程 (1) 的差分格式. 假设 ω 是步长为 h 的均匀网格， $x_{i-\frac{1}{2}}=x_i-0.5h$， $x_{i+\frac{1}{2}}=x_i+0.5\,h$.

我们写出线段 $[x_{i-\frac{1}{2}},x_{i+\frac{1}{2}}]$ 上的平衡方程 (2):

$$W_{i-\frac{1}{2}}-W_{i+\frac{1}{2}}-\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}}q(x)u(x)dx+\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}}f(x)dx=0. \tag{3}$$

为了构造差分格式，我们逼近W和(3)中第一个积分．假设当 $x_{i-\frac{1}{2}} \leqslant x \leqslant x_{i+\frac{1}{2}}$ 时 $u = \text{const} = u_i$，则

$$\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} q(x)u(x)dx \approx hd_iu_i,$$

$$d_i = \frac{1}{h}\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} q(x)dx, \quad (q(x) \geqslant 0). \tag{4}$$

对等式 $du/dx = -W/k$ 在线段 $[x_{i-1}, x_i]$ 上积分，

$$u_{i-1} - u_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{W(x)}{k(x)}dx.$$

因为 (3) 式中的W是在半整数点 $x_{i+\frac{1}{2}}$ 上取值，所以，当 $x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_{i+1}$ 时令 $W = \text{const} = W_{i-\frac{1}{2}}$，则有

$$u_{i-1} - u_i \approx W_{i-\frac{1}{2}} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k(x)},$$

或

$$W_{i-\frac{1}{2}} \approx -a_i \frac{u_i - u_{i-1}}{h} = -a_i u_{\bar{x},i} \tag{5}$$

$$a_i = \left[\frac{1}{h}\int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k(x)}\right]^{-1}. \tag{6}$$

把表达式(4)，(5)代入(3)并用 y_i 表示未知函数，就得到表示网格上热量守恒定律的差分格式

$$\frac{1}{h}\left[a_{i+1}\frac{y_{i+1} - y_i}{h} - a_i\frac{y_i - y_{i-1}}{h}\right] - d_iy_i = -\varphi_i,$$

或更简单地用无足标的记号表示，

$$(ay_{\bar{x}})_x - dy = -\varphi, \tag{7}$$

其中

$$\varphi = \varphi_i = \frac{1}{h}\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} f(x)dx. \tag{8}$$

差分格式(7)的系数按(4)，(6)和(8)式的积分计算．如果方程的系数是光滑函数，则 a，d 和 φ 可用

$$a_i = k(x_{i-\frac{1}{2}}), \quad d_i = q(x_i), \quad \varphi_i = f(x_i) \tag{9}$$

代替，精度是 $O(h^2)$.

平衡方程 (2) 也可用来建立非均匀网格上的差分格式. 假设 ω 是非均匀网格且 $h_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, 2, \cdots, N$. 令

$$x_{i-\frac{1}{2}} = x_i - 0.5 h_i, \quad x_{i+\frac{1}{2}} = x_i + 0.5 h_{i+1},$$

并写出线段 $[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}]$ 上的平衡方程 (2)，则得到关系式 (3). 在非均匀网格上，我们用

$$\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} q(x) u(x) dx \approx \hbar_i d_i u_i,$$

$$d_i = \frac{1}{\hbar_i} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} q(x) dx \tag{4'}$$

代替关系式 (4)，这里 $\hbar_i = \frac{1}{2}(h_i + h_{i+1})$.

类似地，需将 (6), (8) 改成

$$a_i = \left[\frac{1}{h_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k(x)} \right]^{-1}, \tag{6'}$$

$$\varphi_i = \frac{1}{\hbar_i} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} f(x) dx. \tag{8'}$$

于是，非均匀网格上差分格式的形式为

$$\frac{1}{\hbar_i} \left[\frac{a_{i+1}(y_{i+1} - y_i)}{h_{i+1}} - \frac{a_i(y_i - y_{i-1})}{h_i} \right] - d_i y_i = -\varphi_i,$$

$$i = 1, 2, \cdots, N-1.$$

当函数 $k(x)$, $q(x)$ 和 $f(x)$ 充分光滑时，系数 a, d 和 φ 仍可按 (9) 式计算.

再考察一个例子. 对方程 (1) 的第三边值条件建立差分近似. 假定该条件给在点 $x = 0$ 处并有形式

$$u'(0) = \tilde{\kappa} u(0) - \tilde{g}. \tag{10}$$

根据假设，方程 (1) 的系数 $k(x)$ 大于零，所以把条件 (10) 改写成更方便的形式为

$$k(0) u'(0) = \kappa u(0) - g, \tag{11}$$

这里 $\kappa=\tilde{\kappa}k(0)$，$g=\tilde{g}k(0)$. 把边界条件(10)写成(11)的形式更为自然，因为这时左端就是热流量，可能相差一个符号. 写出线段 $\left[0,\frac{h}{2}\right]$ 上的平衡方程 (2)，

$$W_0-W_{\frac{1}{2}}-\int_0^{h/2}q(x)u(x)dx+\int_0^{h/2}f(x)dx=0. \quad (12)$$

由 (11) 得到

$$W_0\equiv-k(0)u'(0)=-\kappa u(0)+g.$$

把此式代入 (12) 得

$$-W_{\frac{1}{2}}=-\kappa u_0+g+\int_0^{h/2}q(x)u(x)dx$$
$$+\int_0^{h/2}f(x)dx. \quad (13)$$

和推导关系式 (4)，(5) 一样对 (13) 中的 $W_{\frac{1}{2}}$ 和 $\int_0^{h/2}q(x)u(x)dx$ 进行逼近、于是得到 $a_1y_{x,0}=\left(\kappa+\frac{h}{2}d_0\right)y_0-\left(g+\frac{h}{2}\varphi_0\right)$

$$=\bar{\kappa}y_0-\bar{g}, \quad (14)$$

这里

$$a_1=\left[\frac{1}{h}\int_0^h\frac{dx}{k(x)}\right]^{-1},\quad d_0=\frac{2}{h}\int_0^{h/2}q(x)dx,$$
$$\varphi_0=\frac{2}{h}\int_0^{h/2}f(x)dx.$$

这些积分同样可代以某种求积公式，例如: $a_1=k(x_{\frac{1}{2}})=k_{\frac{1}{2}}$，$d_0=q_0$，$\varphi_0=f_0$.

容易验证，当方程 (1) 的解 $u=u(x)$ 充分光滑时，用系数按公式 (4)，(6)，(8) 或 (9) 给定的网格方程 (7) 逼近的误差是 $O(h^2)$. 网格边界条件 (14) 逼近条件 (11) 的误差也是 $O(h^2)$. 显然，当 $k(x)\equiv1$，$q(x)\equiv0$ 时，边界条件 (14)

和 §1 问题（10）的边界条件相同.

2. 里兹方法. 前面已经指出，在构造自共轭算子边值问题的数值解法时，希望网格问题也能保持自共轭性. 然而，如果问题相当复杂，边界条件又含有导数，要写出满意的自共轭格式可能会引起相当大的困难. 本段将叙述一个总是导出自共轭格式的里兹方法.

我们提一下里兹方法的要点. 众所周知，一切自共轭微分方程问题都可以归结为求一个函数使某泛函达到极小值的等价问题. 例如，求边值问题

$$\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}\right) - q(x)u = -f(x), \quad 0 < x < 1, \tag{15}$$

$$k(0)u'(0) = \kappa_0 u(0) - g_0,$$
$$-k(1)u'(1) = \kappa_1 u(1) - g_1 \tag{16}$$

的解等价于求函数 $u(x)$ 使泛函

$$I(u) = \frac{1}{2}[u,u] - \int_0^1 f(x)u(x)dx - g_0 u(0) - g_1 u(1) \tag{17}$$

达到极小，这里

$$[u,v] = \int_0^1 [k(x)u'(x)v'(x) + g(x)u(x)v(x)]dx + \kappa_0 u(0)v(0) + \kappa_1 u(1)v(1). \tag{18}$$

关系式（15）是这个变分问题的欧拉方程. 熟知，如果函数 $q(x)$ 和常数 κ_0, κ_1 非负且 $q(x)$ 不恒等于零，则泛函（17）的极小值存在，且极小元 $u(x)$ 属于空间 $W_2^1[0,1]$，它由空间 $L_2[0,1]$ 中具有平方可积广义导数的函数所组成.

这样一来，如果有一个等价的变分问题并且该泛函的极小值存在，则可以利用里兹方法近似地求出使泛函 $I(u)$ 取极小的元 u 来代替用数值方法直接求边值问题的近似解. 我们提一下这个方法的内容. 假设 W 是求泛函 $I(u)$ 极小值的空间，即假定泛函 $I(u)$ 定义在元 $u \in W$ 上，并且使 $I(u)$ 取极

小值的元 u 属于 W. 我们构造有限维子空间叙列 $V_n\in W$, 取代 W, 将在 V_n 中求泛函的极小值. 假设子空间的维数是 n, 且 $\eta_i^{(n)}, i=0,1,\cdots,n-1$ 是该子空间的基, 即对任意的元 $u_n\in V_n$ 都可表示成

$$u_n=\sum_{i=0}^{n-1}a_i\eta_i^{(n)}. \tag{19}$$

用 u_n 的表达式代替 u 代入泛函 $I(u)$, 得到 n 个变量 a_0, $a_1,\cdots,a_{n-1}$ 的函数. 因为我们希望求得这个函数的极小值, 所以数 a_i 应满足方程组

$$\frac{\partial I}{\partial a_i}=0,\quad i=0,1,2,\cdots,n-1. \tag{20}$$

解此方程组, 我们得到使函数 $I(u_n)$ 达到最小值的一组参数值 $\bar{a}_0,\bar{a}_1,\cdots,\bar{a}_{n-1}$. 将这组值代入 (19) 就得到所求的近似解

$$u_n=\sum_{i=0}^{n-1}\bar{a}_i\eta_i^{(n)}.$$

为使近似解 u_n 当 $n\to 0$ 时收敛于精确解 u, 必须假设有限维子空间 V_n 在某种意义下逼近空间 W.

我们从具体的泛函 (17) 出发来寻求方程组 (20). 将 (19) 代入 (17), 得

$$\begin{aligned}I(u_n)&=\frac{1}{2}\left[\sum_{i=0}^{n-1}a_i\eta_i^{(n)},\sum_{i=0}^{n-1}a_i\eta_i^{(n)}\right]\\&\quad-\int_0^1 f\sum_{i=0}^{n-1}a_i\eta_i^{(n)}dx-g_0\sum_{i=0}^{n-1}a_i\eta_i^{(n)}(0)\\&\quad-g_1\sum_{i=0}^{n-1}a_i\eta_i^{(n)}(1)\\&=\frac{1}{2}\sum_{i,j=0}^{n-1}\alpha_{ij}a_ia_j-\sum_{i=0}^{n-1}\beta_ia_i,\end{aligned} \tag{21}$$

其中

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ji} = [\eta_i^{(n)}, \eta_j^{(n)}], \tag{22}$$

$$\beta_i = \int_0^1 f(x)\eta_i^{(n)}(x)dx + g_0\eta_i^{(n)}(0) + g_1\eta_i^{(n)}(1). \tag{23}$$

将(21)式对 a_i 微分并令导数为零，则得到确定 a_i 的方程组：

$$\sum_{j=0}^{n-1} \alpha_{ij}a_j - \beta_i = 0, \quad i = 0,1,2,\cdots,n-1. \tag{24}$$

3. 用里兹方法构造二阶方程的差分格式. 上面讲的是里兹方法的一般情况. 我们的目的是要用里兹方法构造问题(15),(16)的差分格式. 特殊地选择有限维子空间 V_n 以及这些子空间中的坐标函数，就可达到这个目的. 在线段[0,1]上引入步长为 $h = 1/(n-1)$，节点为 $x_i = ih$, $i = 0, 1, 2, \cdots, n-1$ 的均匀网格 ϖ.

记 $N = n - 1$. 方程(24)将是三点差分格式的形式，如果这个系数矩阵是三对角的，亦即，如果 $|i-j| > 1$ 时系数 $\alpha_{ij} = 0$. 在这些条件下，如果展开式(19)中的参数取作函数在 ϖ 节点上的值，则方程组(24)就是古典的差分格式. 如果子空间 V_n 中的坐标函数当 $|i-j| \geqslant 2$ 时，在内积(18)意义下正交，则方程组(24)的系数矩阵就是三对角的. 如果把

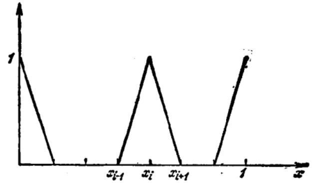


图 4

坐标函数 $\eta_i^{(N)}(x)$ 取成只当 $|x-x_i|\leqslant h$, $x\in[0,1]$ 时不等于零,则它们将在 (18) 意义下,当 $|i-j|\geqslant 2$ 时正交.

W_2^1 中满足这种要求的最简单的函数就是

$$\eta_i^{(N+1)}(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x\leqslant x_{i-1},\quad x_{i+1}\leqslant x<1,\\ (x-x_{i-1})/h, & x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i,\\ (x_{i+1}-x)/h, & x_i\leqslant x\leqslant x_{i+1},\end{cases}\tag{25}$$
$$i=1,2,\cdots,N-1;$$

$$\begin{aligned}\eta_0^{(N+1)}(x)&=\begin{cases}(h-x)/h, & 0\leqslant x\leqslant h,\\ 0, & h\leqslant x\leqslant 1;\end{cases}\\ \eta_N^{(N+1)}(x)&=\begin{cases}(x-1+h)/h, & 1-h\leqslant x\leqslant 1\\ 0, & 0\leqslant x\leqslant 1-h.\end{cases}\end{aligned}\tag{26}$$

图 4 中画出了函数 $\eta_i(x)$ 不为零的那一部分的形状.

如果坐标函数取作 (25), (26), 而展式 (19) 中的参数取作节点上的函数值,则子空间 V_{N+1} 将由分段线性连续函数组成. 这些子空间在 $N=1,2,\cdots$ 时逼近 W_2^1. 因而方程组 (24) 具有如下形式

$$\begin{aligned}&\alpha_{i,i-1}y_{i-1}+\alpha_{i,i}y_i+\alpha_{i,i+1}y_{i+1}-\beta_i=0,\ i=1,\cdots,N-1,\\ &\alpha_{0,0}y_0+\alpha_{0,1}y_1-\beta_0=0,\\ &\alpha_{N,N-1}y_{N-1}+\alpha_{N,N}y_N-\beta_N=0.\end{aligned}\tag{27}$$

现在来计算系数 $\alpha_{i,j}$ 和 β_i. 利用函数 $\eta_i^{N+1}(x)$ 的形状以及公式 (18), (22), (23), 得到

$$\begin{aligned}\alpha_{i,i}=h^{-2}\Big[&\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}k(x)dx+\int_{x_{i-1}}^{x_i}q(x)(x-x_{i-1})^2dx\\ &+\int_{x_i}^{x_{i+1}}q(x)(x-x_{i+1})^2dx\Big],\end{aligned}$$

$$\alpha_{0,0}=h^{-2}\Big[\int_0^h k(x)dx+\int_0^h q(x)(x-h)^2dx\Big]+\kappa_0,$$

$$\alpha_{N,N}=h^{-2}\Big[\int_{1-h}^{1}k(x)dx$$

$$+ \int_{1-h}^{1} q(x)(x-1+h)^2 dx \Bigg] + \kappa_1, \tag{28}$$

$$\alpha_{i,i+1} = \alpha_{i+1,i} = h^{-2}\Bigg[-\int_{x_i}^{x_{i+1}} k(x)dx$$

$$+ \int_{x_i}^{x_{i+1}} q(x)(x_{i+1}-x)(x-x_i)dx\Bigg],$$

$$\beta_i = h^{-1}\Bigg[\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)(x-x_{i-1})dx$$

$$+ \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)(x_{i+1}-x)dx\Bigg],$$

$$\beta_0 = h^{-1}\int_0^h f(x)(h-x)dx + g_0,$$

$$\beta_N = h^{-1}\int_{1-h}^{1} f(x)(x-1+h)dx + g_1.$$

引进记号:

$$a_i = h^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_i} k(x)dx - h^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_i} q(x)(x_i-x)(x-x_{i-1})dx,$$

$$i = 1, 2, \cdots, N,$$

$$d_i = h^{-2}\Bigg[\int_{x_{i-1}}^{x_i} q(x)(x-x_{i-1})dx$$

$$+ \int_{x_i}^{x_{i+1}} q(x)(x_{i+1}-x)dx\Bigg],$$

$$i = 1, 2, \cdots, N-1,$$

$$d_0 = 2h^{-2}\int_0^h q(x)(h-x)dx,$$

$$d_N = 2h^{-2}\int_{1-h}^{1} q(x)(x-1+h)dx, \tag{29}$$

$$\varphi_i = h^{-1}\beta_i = h^{-2}\Bigg[\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)(x-x_{i-1})dx$$

$$+ \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)(x_{i+1}-x)dx\Bigg],\ i = 1, 2, \cdots, N-1,$$

$$\varphi_0 = 2h^{-2}\int_0^h f(x)(h-x)dx,$$

$$\varphi_N = 2h^{-2}\int_{1-h}^{1} f(x)(x-1+h)dx.$$

利用记号 (29) 以及 (28) 中系数 α_{ij} 和 β_i 的形式，可将方程组 (27) 写成

$$(ay_{\bar{x}})_x - dy = -\varphi(x), \quad x = h, 2h, \cdots, 1-h,$$

$$a_1 y_{x,0} = (\kappa_0 + 0.5hd_0)y_0 - (g_0 + 0.5h\varphi_0), \; x = 0, \quad (30)$$

$$-a_N y_{\bar{x},N} = (\kappa_1 + 0.5hd_N)y_N - (g_1 + 0.5h\varphi_N), x = 1.$$

容易验证,如果系数 $k(x)$, $q(x)$ 和 $f(x)$ 充分光滑,则 a_i,d_i 和 φ_i 同 $k(x_i - 0.5h)$, $q(x_i)$ 和 $f(x_i)$ 分别相差 $O(h^2)$. d_0,d_N, φ_0 和 φ_N 是例外，它们同系数 $q(x)$ 和 $f(x)$ 相应的值相差 $O(h)$. 这样选择系数时,方程及左边界条件的逼近(30)就和前面用均衡法所建立的逼近 (7) 和 (14) 一样. 因而,当方程的系数充分光滑时,差分问题 (30) 逼近问题 (15),(16) 的误差是 $O(h^2)$.

如果系数 $k(x)$ 和 $q(x)$ 是常数,则 a_i,d_i 可用显式表示为

$$a_i = a = k - \frac{h^2}{6}q, \quad d_i = d = q.$$

4. 用里兹方法构造四阶方程的差分格式. 我们再讨论一个用变分问题的里兹方法构造格式的例子. 今就带有所谓基本边界条件的最简单的四阶常微分方程边值问题来构造差分格式.

考虑问题

$$u^{(4)}(x) = f(x), \quad 0 < x < 1, \tag{31}$$

$$u(0) = u'(0) = u(1) = u'(1) = 0. \tag{32}$$

求问题 (31),(32) 的解等价于寻找一个函数 $u(x)$，它满足条件 (32) 并使泛函

$$I(u) = \int_0^1 (u'')^2 dx - 2\int_0^1 f(x)u(x)dx \tag{33}$$

取极小值. 众所周知,在条件 (32) 的限制下,泛函 (33) 的极

小值存在且极小元属于空间 $\mathring{W}_2^2[0,1]$，该空间由 $L_2[0,1]$ 中满足条件 (32) 并在 $[0,1]$ 上有平方可积的一、二阶广义导数的函数组成．因而，在用里兹方法求问题 (33) 的近似解时，V_n 应取 $\mathring{W}_2^2$ 的有限维子空间．和前面一样，如果 $\eta_i^{(n)}(x)$，$i=0,1,2,\cdots,n-1$ 是 V_n 中的坐标函数且 a_i 是展式 (19) 的系数，则为求得 a_i，又得到方程组 (24)，但这一次

$$\alpha_{ij}=\alpha_{ji}=\int_0^1 \frac{d^2\eta_i^{(n)}}{dx^2}\cdot\frac{d^2\eta_j^{(n)}}{dx^2}dx,$$

$$\beta_i=\int_0^1 f(x)\eta_i^{(n)}(x)dx.$$

在 $[0,1]$ 上再引进均匀网格．我们只须在网格 $\bar{\omega}$ 的内节点，即在 $\omega=\{x_i=ih|i=1,2,\cdots,N-1\}$ 上求出问题 (31)，(32) 的近似解．

为了从方程组 (24) 中得出差分格式，(19) 的系数 a_i 中至少一部分应是 ω 节点上的网格函数值．这时，坐标函数不为零的节点不可能多于一个，因为在相反的情况下，节点上的函数值就不可能成为参数．不仅如此，只限于节点上的函数值作参数是不成的，因为这时子空间 V_n 不逼近 $\mathring{W}_2^2$．就是说，用这样的族无法一致地逼近导数，而这是逼近 $\mathring{W}_2^2$ 所不可少的．

因此，参数的个数(因而，坐标函数)必须增加．作为辅助参数可以取未知函数在节点上的导数值．这时方程组(24)中的未知量不仅包括未知解在节点上的值，也包括这些节点上的一阶导数值．因而方程组(24)已不是古典意义下的差分格式，但这样的差分格式可以由此用消去增补的未知量的办法得到．

于是，令 $n=2(N-1)$，并取 $y_1,y_2,\cdots,y_{N-1}$ 和 $v_1,v_2,\cdots,v_{N-1}$ 作为参数 a_i 的值．假设第一组参数是未知解在

ω 节点上的值，而第二组是在这些节点上的一阶导数值. 上例中我们取了分段线性(在每个区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上线性)连续函数空间作为子空间 V_n. 这一次我们不能取这样的子空间，因为，由于一阶导数在 ω 的节点上出现间断，这些函数甚至不属于$W_2^2[0,1]$. V_n 可以取连续并且有一阶连续导数的分段多项式(次数大于 1) 组成的空间. 注意，空间 V_n 的维数我们已固定为 $2(N-1)=n$. 如果试图把 V_n 取作分段二次(在每个区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上为二次) 且具有所要求光滑性的函数空间，那末我们不可能做到这点，因为这样的空间将是 $N-2$ 维的 (N 个二次抛物线有 $3N$ 个系数. 为满足边界条件(32)和保证函数及其一阶导数在 ω 节点上的连续性，需要 $2(N+1)$ 个条件). 但是，V_n 可以取 $\mathring{W}_2^2$ 中分段二次函数组成的空间，这些函数在每个区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上可用两个抛物线表示. 这个空间的维数已经是 $2(N-1)$. V_n 也可以取 $\mathring{W}_2^2$ 中分段三次(在每个区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上是三次)函数组成的空间.

展式(19)中系数 a_i 的意义已经确定了，因此，V_n 的基唯一地确定. 它由两类函数组成，分别用 $\eta_i(x)$ 和 $\zeta_i(x)$ 表示.

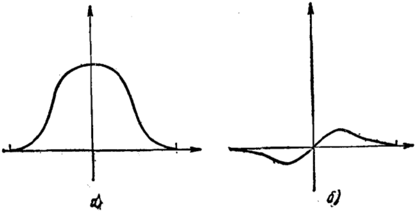


图 5

假设展式（19）中函数 $\eta_i(x)$ 的系数是参数 y_i，而 $\zeta_i(x)$ 的系数是 v_i. 这时坐标函数 $\eta_i(x)$ 在节点 x_i 处取值为 1，在 ω 的所有其余节点上取零值. 函数 $\eta_i(x)$ 的一阶导数在 ω 的所有节点上都应等于零. 坐标函数 $\zeta_i(x)$ 在所有节点上都应等于零，而它的导数在节点 x_i 处等于 1. 在 ω 的所有其余节点上 $\zeta_i(x)$ 的一阶导数均应为零. 容易验证，函数

$$\eta_i(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x\leqslant x_{i-1},\\ & x_{i+1}\leqslant x\leqslant 1,\\ -2\left(\dfrac{x-x_{i-1}}{h}\right)^3+3\left(\dfrac{x-x_{i-1}}{h}\right)^2, & x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i,\\ 2\left(\dfrac{x-x_{i+1}}{h}\right)^3+3\left(\dfrac{x-x_{i+1}}{h}\right)^2, & x_i\leqslant x\leqslant x_{i+1},\end{cases}\tag{34}$$

$$\zeta_i(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x\leqslant x_{i-1},\\ & x_{i+1}\leqslant x\leqslant 1,\\ h\left(\dfrac{x-x_{i-1}}{h}\right)^3-h\left(\dfrac{x-x_{i-1}}{h}\right)^2, & x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i,\\ h\left(\dfrac{x-x_{i+1}}{h}\right)^3+h\left(\dfrac{x-x_{i+1}}{h}\right)^2, & x_i\leqslant x\leqslant x_{i+1},\end{cases}\tag{35}$$

就是上述分段三次函数空间的基. 上述分段二次函数空间的基是

$$\bar{\eta}_i(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x\leqslant x_{i-1},\ x_{i+1}\leqslant x<1,\\ 2\left(\dfrac{x-x_{i-1}}{h}\right)^2, & x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i-0.5h,\\ -2\left(\dfrac{x-x_i}{h}\right)^2+1, & x_i-0.5h\leqslant x\leqslant x_i+0.5h,\\ 2\left(\dfrac{x-x_{i+1}}{h}\right)^2, & x_i+0.5h\leqslant x\leqslant x_{i+1};\end{cases}\tag{36}$$

$$\zeta_i(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant x \leqslant x_{i-1}, \\ & x_{i+1} \leqslant x \leqslant 1, \\ -\dfrac{1}{2h}(x - x_{i-1})^2, & x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i - 0.5h, \\ x - x_i + \dfrac{3}{2h}(x - x_i)^2, & x_i - 0.5h \leqslant x \leqslant x_i, \\ x - x_i - \dfrac{3}{2h}(x - x_i)^2, & x_i \leqslant x \leqslant x_i + 0.5h, \\ \dfrac{1}{2h}(x - x_{i+1})^2, & x_i + 0.5h \leqslant x \leqslant x_{i+1}. \end{cases} \tag{37}$$

函数 (34)—(37) 的形状见图 5 之 a 和 б.

于是,问题 (33) 的近似解将在下列形式中寻找:

$$u_N(x) = \sum_{i=1}^{N-1}(y_i\eta_i(x) + v_i\zeta_i(x)). \tag{38}$$

将 (38) 代入 (33),得

$$\begin{aligned} I(u_N) &= \int_0^1 \left[\sum_{i=1}^{N-1}(y_i\eta_i''(x) + v_i\zeta_i''(x))\right]^2 dx \\ &\quad - 2\int_0^1 f(x)\sum_{i=1}^{N-1}(y_i\eta_i(x) + v_i\zeta_i(x))dx \\ &= \int_0^1 \sum_{i,j=1}^{N-1}(y_iy_j\eta_i''\eta_j'' + 2y_iv_j\eta_i''\zeta_j'' + v_iv_j\zeta_i''\zeta_j'')dx \\ &\quad - 2\int_0^1 f(x)\sum_{i=1}^{N-1}(y_i\eta_i + v_i\zeta_i)dx \\ &= \sum_{i,j=1}^{N-1}(\alpha_{ij}y_iy_j + 2\bar{\alpha}_{ij}y_iv_j + \bar{\bar{\alpha}}_{ij}v_iv_j) \\ &\quad - 2\sum_{i=1}^{N-1}(\beta_iy_i + \bar{\beta}_iv_i), \end{aligned} \tag{39}$$

其中

$$\alpha_{ij}=\alpha_{ji}=\int_0^1 \eta_i''\eta_j''dx,\ \bar{\bar{\alpha}}_{ij}=\bar{\bar{\alpha}}_{ji}=\int_0^1 \zeta_i''\zeta_j''dx,$$

$$\bar{\alpha}_{ij}=\int_0^1 \eta_i''\zeta_j''dx,\qquad \beta_i=\int_0^1 f(x)\eta_i(x)dx,\tag{40}$$

$$\bar{\beta}_i=\int_0^1 f(x)\zeta_i(x)dx,\quad i=1,2,\cdots,N-1.$$

把(39)对 y_i 和 v_i，$i=1,2,\cdots,N-1$ 微分并令所得之导数为零，则得到确定 y_i 和 v_i 的方程组

$$\sum_{j=1}^{N-1}(\alpha_{ij}y_j+\bar{\alpha}_{ij}v_j)-\beta_i=0,$$

$$\sum_{j=1}^{N-1}(\bar{\alpha}_{ji}y_j+\bar{\bar{\alpha}}_{ij}v_j)-\bar{\beta}_i=0,\tag{41}$$

$$i=1,2,\cdots,N-1.$$

把这个方程组改写为

$$AU=F,$$

其中 $U=\begin{pmatrix}y\\v\end{pmatrix}$ 是未知向量，$F=\begin{pmatrix}\beta\\\bar{\beta}\end{pmatrix}$ 是已知向量，$A=\begin{pmatrix}\alpha & \bar{\alpha}\\ \bar{\alpha}' & \bar{\bar{\alpha}}\end{pmatrix}$ 是分块矩阵，它的元素是矩阵：

$$\alpha=(\alpha_{ij}),\quad \bar{\alpha}=(\bar{\alpha}_{ij}),\quad \bar{\alpha}'=(\bar{\alpha}_{ji}),\quad \bar{\bar{\alpha}}=(\bar{\bar{\alpha}}_{ij}).$$

转置矩阵的形式为

$$A'=\begin{pmatrix}\alpha & \bar{\alpha}\\ \bar{\alpha}' & \bar{\bar{\alpha}}\end{pmatrix},$$

即 A 是对称矩阵.

我们来计算系数 $\alpha_{ij},\bar{\alpha}_{ij},\bar{\bar{\alpha}}_{ij}$. 利用函数 $\eta_i(x)$ 和 $\zeta_i(x)$ 的表达式(34)，(35)，由(40)得到

$$\alpha_{i,i}=24/h^2,\ \bar{\alpha}_{i,i}=0,\ \bar{\bar{\alpha}}_{i,i}=8/h,$$

$$i=1,2,\cdots,N-1,$$

$$\alpha_{i,i+1}=\alpha_{i+1,i}=-12/h^3,\ \bar{\alpha}_{i,i+1}=6/h^2,$$

$$\bar{a}_{i+1,i} = -6/h^2,$$
$$\bar{\bar{a}}_{i,i+1} = \bar{\bar{a}}_{i+1,i} = 2/h,\ i = 1,2,\cdots,N-2,$$
$$a_{ij} = \bar{a}_{ij} = \bar{\bar{a}}_{ij} = 0,\ |i-j| \geqslant 2.$$

因而，方程组 (41) 可以写成

$$l_i(y,v) \equiv 2y_{i-1} - 4y_i + 2y_{i+1} + hv_{i-1} - hv_{i+1} = -\frac{h^3}{6}\beta_i,$$
$$m_i(y,v) \equiv 3y_{i-1} - 3y_{i+1} + hv_{i-1} + 4hv_i + hv_{i+1} = \frac{h^2}{2}\bar{\beta}_i,\quad i = 2,3,\cdots,N-2,$$
$$l_1(y,v) \equiv -4y_1 + 2y_2 - hv_2 = -\frac{h^3}{6}\beta_1, \tag{42}$$
$$l_{N-1}(y,v) \equiv 2y_{N-2} - 4y_{N-1} + hv_{N-2} = -\frac{h^3}{6}\beta_{N-1},$$
$$m_1(y,v) \equiv -3y_2 + 4hv_1 + hv_2 = \frac{h^2}{2}\bar{\beta}_1,$$
$$m_{N-1}(y,v) \equiv 3y_{N-2} + hv_{N-2} + 4hv_{N-1} = \frac{h^2}{2}\bar{\beta}_{N-1}.$$

为了便于把所得格式和通常的差分格式进行比较，消去 (42) 中的函数 v_i. 容易验证，

$$l_{i-1} + 4l_i + l_{i+1} - m_{i-1} + m_{i+1}$$
$$\equiv -y_{i-2} + 4y_{i-1} - 6y_i + 4y_{i+1} - y_{i+2}$$
$$= -\frac{h^3}{6}(\beta_{i-1} + 4\beta_i + \beta_{i+1}) - \frac{h^2}{2}(\bar{\beta}_{i-1} - \bar{\beta}_{i+1}),$$
$$i = 3,4,\cdots,N-3,$$

$$l_1 + 4l_2 + l_3 - m_1 + m_3$$
$$\equiv 4y_1 - 6y_2 + 4y_3 - y_4$$
$$= -\frac{h^3}{6}(\beta_1 + 4\beta_2 + \beta_3) - \frac{h^2}{2}(\bar{\beta}_1 - \bar{\beta}_3),$$

$$7l_1 + 2l_2 - m_1 + 2m_2$$

$$= -18y_1 + 9y_2 - 2y_3$$
$$= -\frac{h^3}{6}(7\beta_1 + 2\beta_2) - \frac{h^2}{2}(\bar{\beta}_1 - 2\bar{\beta}_2), \qquad (43)$$
$$l_{N-3} + 4l_{N-2} + l_{N-1} - m_{N-3} + m_{N-1}$$
$$= -y_{N-4} + 4y_{N-3} - 6y_{N-2} + 4y_{N-1}$$
$$= -\frac{h^3}{6}(\beta_{N-3} + 4\beta_{N-2} + \beta_{N-1}) - \frac{h^2}{2}(\bar{\beta}_{N-3} - \bar{\beta}_{N-1}),$$
$$2l_{N-2} + 7l_{N-1} - 2m_{N-2} + m_{N-1}$$
$$= -2y_{N-3} + 9y_{N-2} - 18y_{N-1}$$
$$= -\frac{h^3}{6}(2\beta_{N-2} + 7\beta_{N-1}) - \frac{h^2}{2}(2\beta_{N-2} - \beta_{N-1}).$$

利用前面引进的差商记号，将方程组 (43) 写成差分格式的形式

$$y_{\bar{x}x\bar{x}x} = \varphi(x), \quad x = 2h, 3h, \cdots, 1 - 2h,$$
$$y(0) = 0, \quad y_{\bar{x}} - \frac{h}{2}y_{\bar{x}x} + \frac{h^2}{3}y_{\bar{x}xx}\Big|_{x=h} = \frac{h^3}{4}\varphi(x_1), \qquad (44)$$
$$y(1) = 0, \quad y_x + \frac{h}{2}y_{\bar{x}x} + \frac{h^2}{3}y_{\bar{x}x\bar{x}}\Big|_{x=1-h} = -\frac{h^3}{4}\varphi(x_{N-1}),$$

其中

$$\varphi(x_i) = \frac{1}{6h}\left\{\int_{x_{i-2}}^{x_{i-1}} f(x)\left(\frac{x - x_{i-2}}{h}\right)^3 dx\right.$$
$$+ \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\left[-3\left(\frac{x - x_i}{h}\right)^3 - 6\left(\frac{x - x_i}{h}\right)^2 + 4\right]dx$$
$$+ \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\left[3\left(\frac{x - x_i}{h}\right)^3 - 6\left(\frac{x - x_i}{h}\right)^2 + 4\right]dx$$
$$\left.+ \int_{x_{i+1}}^{x_{i+2}} f(x)\left(\frac{x_{i+2} - x}{h}\right)^3 dx\right\}, \qquad (45')$$
$$i = 2, 3, \cdots, N - 2,$$
$$\varphi(x_1) = \frac{1}{9h}\left\{\int_0^h f(x)\left[-11\left(\frac{x}{h}\right)^3 + 18\left(\frac{x}{h}\right)^2\right]dx\right.$$

$$+\int_h^{2h} f(x)\left[17\left(\frac{x-2h}{h}\right)^3-10\left(\frac{x-h}{h}\right)^3\right.$$

$$\left.+24\left(\frac{x-2h}{h}\right)^2+12\left(\frac{x-h}{h}\right)^2\right]dx$$

$$\left.-2\int_{2h}^{3h} f(x)\left(\frac{x-3h}{h}\right)^3 dx\right\}, \qquad (45'')$$

$$\varphi(x_{N-1})=\frac{1}{9h}\left\{2\int_{1-3h}^{1-2h} f(x)\left(\frac{x-1+3h}{h}\right)^3 dx\right.$$

$$+\int_{1-2h}^{1-h} f(x)\left[10\left(\frac{x-1+h}{h}\right)^3-17\left(\frac{x-1+2h}{h}\right)^3\right.$$

$$\left.+12\left(\frac{x-1+h}{h}\right)^2+24\left(\frac{x-1+2h}{h}\right)^2\right]dx$$

$$\left.+\int_{1-h}^{1} f(x)\left[11\left(\frac{x-1}{h}\right)^3+18\left(\frac{x-1}{h}\right)^2\right]dx\right\}.$$

如果在里兹方法中坐标函数取成(36),(37),则差分格式就是

$$y_{\bar{x}x\bar{x}x}=\bar{\varphi}(x),\quad x=2h,\ 3h,\cdots,1-2h,$$

$$y(0)=0,\quad y_{\bar{x}}-\frac{h}{2}y_{\bar{x}x}+\frac{5h^2}{16}y_{\bar{x}xx}\Big|_{x=h}=\frac{7h^3}{16}\bar{\varphi}(h),\ (46)$$

$$y(1)=0,\quad y_x+\frac{h}{2}y_{\bar{x}x}+\frac{5h^2}{16}y_{\bar{x}x\bar{x}}\Big|_{x=1-h}=-\frac{7h^3}{16}\bar{\varphi}(1-h),$$

其中 $\bar{\varphi}(x)$ 由类似于 (45) 的公式确定. 可以验证，如果问题 (31), (32) 的解充分光滑,则差分格式 (44) 的逼近误差是 $O(h^4)$. 格式(46)的误差是 $O(h^2)$.

我们指出，和问题 (41) 不同，格式 (44) 和 (46) 不是自共轭的. 格式的这一缺点是由于从方程组(42)中消去未知量 v_i 所致.

5. 逼近泛函的方法. 用里兹方法构造四阶方程 (问题 (31), (32)) 的差分格式时,我们遇到了这种情况,即所得的方程组中方程(以及未知量)的个数比节点数多一倍. 在上述例子中,这些“多余”的未知量可以消去,但所得方程组的矩阵

就不对称了．下面叙述的逼近泛函的方法克服了这些缺点．这个方法也是从变分泛函出发，但不是去逼近要在其中寻找极小值的空间，而是逼近泛函本身．如果逼近选得恰当，用这种方法可以构造很好的差分格式．

我们来讨论用逼近泛函的方法构造差分格式的两个例子．第一个例子是构造问题 (15),(16) 的差分格式．我们从寻找泛函 (17) 极小元的等价问题入手．

为了构造使泛函 (17) 极小化的近似方法，我们用求积公式代替泛函表达式中的积分，其中的导数用差商代替．精确地说，假设 ω 是区间 $[0,1]$ 上步长为 h 的均匀网格．(17) 中的第一个积分用中心矩形求积公式代替，后两个积分用梯形求积公式代替．在点 $x_i-0.5h$ (x_i 是节点) 处的导数值用下列差商代替：

$$u'(x)\big|_{x=x_i-0.5h}\sim u_{\bar{x},i}=\frac{u_i-u_{i-1}}{h}.$$

于是得到

$$\begin{aligned}I_h(y)=&\sum_{i=1}^{N}k(x_i-0.5h)\left(\frac{y_i-y_{i-1}}{h}\right)^2h\\&+\frac{h}{2}(q(0)y_0^2+q(1)y_N^2-2f(0)y_0-2f(1)y_N)\\&+\sum_{i=1}^{N-1}[q(x_i)y_i^2-2f(x_i)y_i]h+\kappa_0y_0^2\\&+\kappa_1y_N^2-2g_0y_0-2g_1y_N.\end{aligned}\tag{47}$$

$I_h(y)$ 是 $N+1$ 个变量 y_i 的函数，为了求出确定极小点的方程，应使函数 $I_h(y)$ 对 y_i 的一阶导数为零．对于 $i=1,2,\cdots,N-1$，我们有下列方程：

$$\begin{aligned}&-\frac{2}{h}k(x_i+0.5h)(y_{i+1}-y_i)+\frac{2}{h}k(x_i-0.5h)(y_i-y_{i-1})\\&+2q(x_i)hy_i-2hf(x_i)=0,\quad i=1,2,\cdots,N-1.\end{aligned}\tag{48}$$

当 $i=0,N$ 时，相应地有

$$-\frac{2}{h}k\left(\frac{h}{2}\right)(y_1-y_0)+hq(0)y_0$$

$$-hf(0)+2\kappa_0y_0-2g_0=0, \tag{49}$$

$$\frac{2}{h}k\left(1-\frac{1}{2}h\right)(y_N-y_{N-1})+hq(1)y_N$$

$$-hf(1)+2\kappa_1y_N-2g_1=0.$$

把方程 (48) 除以 $(-2h)$ 得

$$\frac{1}{h}\left[k\left(x_i+\frac{h}{2}\right)\frac{y_{i+1}-y_i}{h}-k\left(x_i-\frac{h}{2}\right)\frac{y_i-y_{i-1}}{h}\right]$$

$$-q(x_i)y_i=-f(x_i),\quad i=1,2,\cdots,N-1. \tag{50}$$

把关系式 (49) 除以 2

$$k\left(\frac{h}{2}\right)\frac{y_1-y_0}{h}=\left(\kappa_0+\frac{h}{2}q(0)\right)y_0-\left(g_0+\frac{h}{2}f(0)\right),$$

$$-k\left(1-\frac{h}{2}\right)\frac{y_N-y_{N-1}}{h} \tag{51}$$

$$=\left(\kappa_1+\frac{h}{2}q(1)\right)y_N-\left(g_1+\frac{h}{2}f(1)\right).$$

容易验证，如果 (7) 中的系数按 (9) 式选取，则差分格式(50) 和以前用均衡法求得的差分格式 (7) 一样. 类似地，(51) 中第一个边界条件和用均衡法建立的条件 (14) 也一样.

再考虑一个构造差分格式的例子. 但现在是考虑带有所谓自然边界条件的最简单的四阶常微分方程

$$u^{(4)}+qu=f(x),\ 0<x<1,\ q=\text{const}, \tag{52}$$

$$u''(0)=u'''(0)=u''(1)=u'''(1)=0.$$

问题 (52) 等价于找一个元 $u(x)$，使泛函

$$I(u)=\int_0^1((u'')^2+qu^2)dx-2\int_0^1u(x)f(x)dx \tag{53}$$

取极小值. 这一次，全部积分都用梯形求积公式逼近，并且

在逼近 $(u''(x))^2$ 的积分时能利用边界条件 (52)，即条件 $u''(0)=u''(1)=0$.

现在用二阶差商 $u_{\bar{x}x}$ 代替 u''，我们得到泛函 (53) 的逼近

$$I_h(y)=\sum_{i=1}^{N-1}\left(\frac{y_{i-1}-2y_i+y_{i+1}}{h^2}\right)^2 h$$
$$+\sum_{i=1}^{N-1}(qy_i^2-2f(x_i)y_i)h$$
$$+\frac{h}{2}[qy_0^2+qy_N^2-2f(0)y_0-2f(1)y_N].$$

此式对 y_i 微分，得到 y_i 的差分方程：

$$\frac{2}{h^3}(y_{i-2}-2y_{i-1}+y_i)-\frac{4}{h^3}(y_{i-1}-2y_i+y_{i+1})$$
$$+\frac{2}{h^3}(y_i-2y_{i+1}+y_{i+2})+2hqy_i-2hf(x_i)=0,$$
$$i=2,3,\cdots,N-2,$$
$$-\frac{4}{h^3}(y_0-2y_1+y_2)+\frac{2}{h^3}(y_1-2y_2+y_3)$$
$$+2(qy_1-2f(h))=0,$$
$$\frac{2}{h^3}(y_0-2y_1+y_2)+hqy_0-hf(0)=0,$$
$$\frac{2}{h^3}(y_{N-3}-2y_{N-2}+y_{N-1})-\frac{4}{h^3}(y_{N-2}-2y_{N-1}+y_N)$$
$$+2(qy_{N-1}-2hf(1-h))=0,$$
$$\frac{2}{h^3}(y_{N-2}-2y_{N-1}+y_N)+hqy_N-hf(1)=0.$$

把所得的这些关系式乘以适当的表示式，并利用前面引进的差商记号，则有

$$y_{xx}+\frac{h^2}{2}qy=\frac{h^2}{2}f,\quad x=0,$$

$$
\begin{aligned}
&y_{xx\bar{x}} - \frac{1}{h} y_{\bar{x}x} + hqy = hf, \quad x = h, \\
&y_{\bar{x}x\bar{x}x} + qy = f, \quad x = 2h, 3h, \cdots, 1 - 2h, \\
&-y_{\bar{x}\bar{x}x} - \frac{1}{h} y_{\bar{x}x} + hqy = hf, \quad x = 1 - h, \\
&y_{\bar{x}\bar{x}} + \frac{h^2}{2} qy = \frac{h^2}{2} f, \quad x = 1.
\end{aligned}
\tag{54}
$$

这就是逼近问题(52)的差分问题．为了证实它的逼近误差是 $O(h^2)$，必须首先把第二个和倒数第二个方程用第一、第二以及倒数第一、第二个方程的线性组合代替．

就是把第二个方程换成

$$
y_{xx\bar{x}}(h) + hqy(h) + \frac{h}{2} qy(0) = hf(h) + \frac{h}{2} f(0),
$$

而把倒数第二个方程换成

$$
\begin{aligned}
&-y_{\bar{x}x\bar{x}}(1 - h) + hqy(1 - h) + \frac{h}{2} qy(1) \\
&\quad = hf(1 - h) + \frac{h}{2} f(1).
\end{aligned}
$$

现在利用泰勒公式可以确信，问题 (54) 的逼近误差确实就是 $O(h^2)$.

6. 布本诺夫-伽辽金方法． 布本诺夫-伽辽金方法是另一种投影方法，它很接近于第 2 段讲的里兹方法，但应用范围更广一些．当问题为非自共轭或非定时，本法也可应用．

我们以问题

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}\right) + r(x)\frac{du}{dx} - q(x)u = -f(x), \quad 0 < x < 1, \\
&k(0)u'(0) = \kappa_0 u(0) - g_0, -k(1)u'(1) = \kappa_1 u(1) - g_1
\end{aligned}
\tag{55}
$$

为例来讨论布本诺夫-伽辽金方法．

我们提醒一下(参看第一章 §2)，函数 $u(x) \in W_2^1[0,1]$ 称

为问题(55)的广义解，如果它对任意的 $v(x)\in W_2^1[0,1]$ 满足积分恒等式

$$\int_0^1 (ku'v' - ru'v + quv - fv)dx$$
$$+ \kappa_0 u(0)v(0) + \kappa_1 u(1)v(1) - g_0 v(0) - g_1 v(1) = 0. \quad (56)$$

和前面一样，假设 V_n 是空间 $W_2^1[0,1]$ 的有限维子空间叙列. 我们寻求问题 (55) 的近似解 $u_n(x)\in V_n$，使之对一切函数 $v_n(x)\in V_n$ 满足衡等式 (56). 假设 ω 是 $[0,1]$ 上步长为 $h=1/N$ 的均匀网格，V_n 是前面引进的分段线性连续函数空间，而 $\eta_i^{(n)}(x)$ 是它的坐标函数，由关系式(25)，(26)给出. 和前面一样，我们寻求形为

$$u_{N+1}(x) = \sum_{j=0}^{N} y_j \eta_j^{(N+1)}(x) \quad (57)$$

的近似解. 令

$$v(x) = \eta_i^{(N+1)}(x),$$

并将 (56) 中的 $u(x)$ 用表示式 (57) 代替，则得

$$\sum_{j=0}^{N}\Big\{\int_0^1\Big[k(x)y_j\frac{d}{dx}\eta_j^{(N+1)}\frac{d}{dx}\eta_i^{(N+1)} - r(x)y_j\frac{d}{dx}\eta_j^{(N+1)}\eta_i^{(N+1)}$$
$$+ q(x)y_j\eta_i^{(N+1)}\eta_j^{(N+1)} - f(x)\eta_i^{(N+1)}\Big]dx$$
$$+ \kappa_0 y_j\eta_j^{(N+1)}(0)\eta_i^{(N+1)}(0) + \kappa_1 y_j\eta_j^{(N+1)}(1)\eta_i^{(N+1)}(1)$$
$$- g_0\eta_j^{(N+1)}(0) - g_1\eta_j^{(N+1)}(1)\Big\} = 0.$$

考虑到坐标函数 $\eta_j(x)$ 的形式 (25)，(26)，由此得到方程组

$$\alpha_{i,i-1}y_{i-1} + \alpha_{i,i}y_i + \alpha_{i,i+1}y_{i+1} - \beta_i = 0,$$
$$i = 1,2,\cdots,N-1, \quad (58)$$
$$\alpha_{0,0}y_0 + \alpha_{0,1}y_1 - \beta_1 = 0,\ \alpha_{N,N-1}y_{N-1} + \alpha_{N,N}y_N - \beta_N = 0,$$

其中

$$\alpha_{i,i-1} = h^{-2}\Big[-\int_{x_{i-1}}^{x_i} k(x)dx + \int_{x_{i-1}}^{x_i}(x - x_{i-1})r(x)dx$$

$$
+\int_{x_{i-1}}^{x_i}(x_i-x)(x-x_{i-1})q(x)dx\Bigg],
$$

$$
\alpha_{i,i}=h^{-2}\Bigg[\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}k(x)dx-\int_{x_{i-1}}^{x_i}(x-x_{i-1})r(x)dx
$$

$$
+\int_{x_i}^{x_{i+1}}(x_{i+1}-x)r(x)dx+\int_{x_{i-1}}^{x_i}(x-x_{i-1})^2q(x)dx
$$

$$
+\int_{x_i}^{x_{i+1}}(x_{i+1}-x)^2q(x)dx\Bigg],
$$

$$
\alpha_{i,i+1}=h^{-2}\Bigg[-\int_{x_i}^{x_{i+1}}k(x)dx-\int_{x_i}^{x_{i+1}}(x_{i+1}-x)r(x)dx
$$

$$
+\int_{x_i}^{x_{i+1}}(x-x_i)(x_{i+1}-x)q(x)\,dx\Bigg],
$$

$$
i=1,2,\cdots,N-1,
$$

$$
\alpha_{0,0}=h^{-2}\Bigg[\int_0^h k(x)dx+\int_0^h(h-x)r(x)dx
$$

$$
+\int_0^h(h-x)^2q(x)dx\Bigg]+\kappa_0,
$$

$$
\alpha_{0,1}=h^{-2}\Bigg[-\int_0^h k(x)dx-\int_0^h(h-x)r(x)dx
$$

$$
+\int_0^h x(h-x)q(x)dx\Bigg],
$$

$$
\alpha_{N,N-1}=h^{-2}\Bigg[-\int_{1-h}^1 k(x)dx+\int_{1-h}^1(x-1+h)r(x)dx
$$

$$
+\int_{1-h}^{h}(1-x)(x-1-h)q(x)dx\Bigg],
$$

$$
\alpha_{N,N}=h^{-2}\Bigg[\int_{1-h}^1 k(x)dx-\int_{1-h}^1(1-x)r(x)dx
$$

$$
+\int_{1-h}^1(1-x)^2q(x)dx\Bigg]+\kappa_1,
$$

$$
\beta_i=h^{-1}\Bigg[\int_{x_{i-1}}^{x_i}(x-x_{i-1})f(x)dx
$$

$$
+\int_{x_i}^{x_{i+1}}(x_{i+1}-x)f(x)dx\Bigg],\ i=1,2,\cdots,N-1,
$$

$$\beta_0 = h^{-1}\int_0^h (h - x)f(x)dx + g_0,$$

$$\beta_1 = h^{-1}\int_{1-h}^1 (x - 1 + h)f(x)dx + g_1.$$

如果引进记号

$$a_i = h^{-1}\left[\int_{x_{i-1}}^{x_i} k(x)dx - \int_{x_{i-1}}^{x_i}(x_i - x)(x - x_{i-1})q(x)dx\right],$$
$$i = 1, 2, \cdots, N,$$

$$d_i = h^{-2}\left[\int_{x_{i-1}}^{x_i}(x - x_{i-1})q(x)dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}}(x_{i+1} - x)q(x)dx\right],\ i = 1,2,\cdots,N-1,$$

$$b_i^- = h^{-2}\int_{x_{i-1}}^{x_i}(x - x_{i-1})r(x)dx,\ i = 1,2,\cdots,N,$$

$$b_i^+ = h^{-2}\int_{x_i}^{x_{i+1}}(x_{i+1} - x)r(x)dx,\ i = 0,1,\cdots,N-1;$$

$$d_0 = 2h^{-2}\int_0^h q(x)(h - x)dx,$$

$$d_N = 2h^{-2}\int_{1-h}^1 (x - 1 + h)q(x)dx;$$

$$\varphi_i = h^{-1}\beta_i = h^{-2}\left[\int_{x_{i-1}}^{x_i}(x - x_{i-1})f(x)dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}}(x_{i+1} - x)f(x)dx\right],\quad i = 1,2,\cdots,N-1,$$

$$\varphi_0 = 2h^{-2}\int_0^h (h - x)f(x)dx,$$

$$\varphi_N = 2h^{-2}\int_{1-h}^1 (x - 1 + h)f(x)dx,$$

则方程组 (58) 可以改写成

$$(ay_{\bar{x}})_x + b^+y_x + b^-y_{\bar{x}} - dy = -\varphi,$$
$$x = h, 2h, \cdots, 1-h,$$
$$(a_1 + b_0^+h)y_x = (\kappa_0 + 0.5hd_0)y - (g_0 + 0.5h\varphi_0),$$

$$x = 0, \tag{59}$$

$$-(a_N - hb_N^-)y_{\bar{x}} = (\kappa_1 + 0.5hd_N)y - (g_1 + 0.5h\varphi_N),$$

$$x = 1.$$

如果 $r(x) \equiv 0$，则显然问题 (59) 和问题 (30) 完全一样. 如果系数 $k(x)$，$g(x)$ 和 $r(x)$ 是常数，则 a_i，d_i，b_i^- 和 b_i^+ 可用显式表示

$$a_i = a = k - \frac{h^2}{6}q, \quad d_i = d = q, \quad b_i^- = b_i^+ = \frac{r}{2}.$$

7. 逼近积分恒等式的方法. 这一方法与布本诺夫-伽辽金方法的关系就像逼近泛函的方法与里兹方法的关系一样.

我们以构造问题 (55) 的差分格式为例，简单说明一下逼近积分恒等式的方法. 在均匀网格 $\bar{\omega}$ 上确定问题 (55) 广义解的积分恒等式 (56) 可用如下的求和恒等式来逼近:

$$\sum_{i=1}^{N} k\left(x_i - \frac{h}{2}\right)\left(\frac{y_i - y_{i-1}}{h}\right)\left(\frac{v_i - v_{i-1}}{h}\right)h$$

$$+ \sum_{i=1}^{N-1}\left[-r(x_i)\left(\frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}\right)v_i + q(x_i)y_iv_i - f(x_i)v_i\right]h$$

$$+ \frac{h}{2}[q(0)y_0v_0 - f(0)v_0 + q(1)y_Nv_N - f(1)v_N]$$

$$+ \kappa_0y_0v_0 + \kappa_1y_Nv_N - g_0v_0 - g_1v_N = 0.$$

在这个等式中 v_i 是任意的网格函数. 选取 v_i 使它在一个节点上等于 1，而在所有其余节点上等于零，我们就得到 v_i 不等于零的那个节点上的方程. 这样逐个地挑选所有节点，就得到如下的差分格式:

$$\left(k\left(x - \frac{h}{2}\right)y_{\bar{x}}\right)_x + r(x)y_{\overset{\circ}{x}} - q(x)y = -f(x), \quad x \in \omega,$$

$$\left(k\left(\frac{h}{2}\right) + h\frac{r(0)}{2}\right)y_x = \left(\kappa_0 + \frac{h}{2}q(0)\right)y$$

$$-\left(g_0+\frac{h}{2}f(0)\right), \qquad x=0,$$

$$-\left(k\left(1-\frac{h}{2}\right)-\frac{h}{2}r(1)\right)y_{\bar{x}}$$

$$=\left(\kappa_1+\frac{h}{2}q(1)\right)y-\left(g_1+\frac{h}{2}f(1)\right), \qquad x=1.$$

8. 在被逼近方程的解上提高逼近误差的阶. 在 § 1 中对方程(5)引进了两个差分格式 (6) 和 (7)，它们的差别仅在右端逼近不同，但前者的逼近误差是 $O(h^2)$，而后者是 $O(h^4)$. 现在讲一下 § 1 构造格式 (7) 的方法. 对方程

$$Lu\equiv u''=-f(x) \tag{60}$$

首先写出最简单的逼近

$$L_h y_i=\frac{y_{i-1}-2y_i+y_{i+1}}{h^2}=-\varphi_i, \quad \varphi_i=f(x_i),$$

并在假设 $u(x)\in C^{(6)}$ 的条件下计算它的误差. 根据定义

$$\psi(x)=L_h u+\varphi,$$

而

$$L_h u=Lu+\frac{h^2}{12}L^2u+O(h^4), \tag{61}$$

因此

$$\psi(x)=\frac{h^2}{12}L^2u+O(h^4). \tag{62}$$

由 (60) 得到 $L^2u=-Lf$. 将 L^2u 的这个值代入 (62)，得

$$\psi(x)+\frac{h^2}{12}f''(x)=O(h^4). \tag{63}$$

从 (63) 可知，要写出逼近误差为 $O(h^4)$ 的差分格式，只需将此格式的逼近误差 $\bar{\psi}(x)$ 表示成

$$\bar{\psi}(x)=\psi(x)+\frac{h^2}{12}f''(x),$$

其中 $\psi(x)$ 由关系式 (62) 确定. 写出具有这种误差的格式并不难，只需将

$$\bar{\varphi}(x) = f(x) + \frac{h^2}{12}f''(x) \tag{64}$$

取作这个格式的右端，这个格式就是

$$L_h y = -\bar{\varphi}(x).$$

显然，可以将 (64) 中的 $f''(x)$ 换成函数 $f(x)$ 的二阶差商，即 $f_{\bar{x}x}(x)$, $\bar{\varphi} = f + \frac{h^2}{12} f_{\bar{x}x}$，而不降低逼近误差的阶.

同样地，对于 § 1 问题 (8) 的第三边界条件，可以构造出 § 1 所指出的差分逼近(10). 注意，这个逼近已经用均衡法构造出来了. 我们重新写出这个条件的简单逼近，

$$l_h y = \frac{y_1 - y_0}{h} = \kappa y_0 - \nu_0, \quad \nu_0 = g_0$$

并计算它的误差，

$$\begin{aligned}\psi_0 &= \frac{u_1 - u_0}{h} - \kappa u_0 + \nu_0 \\ &= u'(0) + \frac{h^2}{2}u''(0) - \kappa u(0) + g_0 + O(h^2) \\ &= \frac{h}{2}u''(0) + O(h^2).\end{aligned}$$

由 § 1 方程 (8) 知，$u''(0) = -f(0)$. 因而

$$\psi_0 + \frac{h}{2}f(0) = O(h^2). \tag{65}$$

从 (65) 可以看出，要写出误差为 $O(h^2)$ 的差分逼近，只需将右端 ν_0 取成 $\bar{\nu}_0 = g_0 + \frac{h}{2}\varphi_0$，即

$$l_h y = \frac{y_1 - y_0}{h} = \kappa y_0 - \bar{\nu}_0.$$

我们再考虑两个提高格式逼近误差阶的例子（对常系数

方程). 首先取方程

$$u'' - qu = -f(x), \tag{66}$$

其中 $q = \text{const}$. 这个方程的最简单逼近是

$$L_h y = y_{\bar{x}x} - qy = -\varphi, \quad \varphi = f(x).$$

它的误差为

$$\begin{aligned}\psi(x) &= L_h u + \varphi \\ &= u''(x) + \frac{h^2}{12}u^{(4)}(x) + O(h^4) - qu + f \\ &= \frac{h^2}{12}u^{(4)} + O(h^4).\end{aligned}$$

由方程 (66) 得

$$u^{(4)} = qu''(x) - f''(x) = q^2 u - qf - f''.$$

将 $u^{(4)}(x)$ 的这个值代入 $\psi(x)$ 的表达式得

$$\psi(x) - \frac{h^2}{12}(q^2 u - qf - f'') = O(h^4).$$

和以前一样,由此推知,要写出逼近误差为 $O(h^4)$ 的差分格式,只需把这个格式的逼近误差表示成

$$\bar{\psi}(x) = \psi(x) - \frac{h^2}{12}(q^2 u - qf - f'').$$

现在仅改变格式的右端已经不够了,还必须改变 y 的系数. 显然,逼近误差为 $O(h^4)$ 的差分格式可以取成

$$y_{\bar{x}x} - q\left(1 + \frac{h^2}{12}q\right)y = -\left[f + \frac{h^2}{12}(qf + f'')\right].$$

最后, 考虑方程

$$u'' + ru' - qu = -f(x), \tag{67}$$

这里 $r = \text{const}$, $q = \text{const}$. 这个方程的逼近取成

$$y_{\bar{x}x} + \frac{1}{2}r(y_x + y_{\bar{x}}) - qy = -f$$

是很显然的. 我们来计算这个格式的逼近误差.

$$\psi = u'' + \frac{h^2}{12}u^{(4)} + ru' + \frac{h^2}{6}ru''' - qu + f + O(h^4)$$

$$= \frac{h^2}{12}(u^{(4)} + 2ru''') + O(h^4).$$

由方程 (67) 得

$$u''' = (r^2 + q)u' - rqu + rf - f',$$

$$u^{(4)} = -(r^3 + 2rq)u' + (r^2q + q^2)u$$

$$+ rf' - qf - f'' - r^2f.$$

将 u''' 和 $u^{(4)}$ 的这些值代入 ψ 的表达式，得

$$\psi = \frac{h^2}{12}[r^3u' + q(q - r^2)u - (q - r^2)f - rf' - f'']$$

$$+ O(h^4)$$

$$= \frac{h^2}{12}\left[\frac{1}{2}r^3(u_x + u_{\bar{x}}) + q(q - r^2)u - (q - r^2)f - rf' - f''\right]$$

$$+ O(h^4).$$

由此可知，所求的格式应有如下形式

$$y_{\bar{x}x} + \frac{1}{2}r\left(1 - \frac{h^2}{12}r^2\right)(y_x + y_{\bar{x}}) - q\left(1 + \frac{h^2}{12}(q - r^2)\right)y$$

$$= -\left[f + \frac{h^2}{12}((q - r^2)f + rf' + f'')\right].$$

9. 变系数方程的高精度格式. 作为例子，我们考虑方程

$$\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}\right) = -f(x). \tag{68}$$

对这个方程已经用几种不同的方法构造了格式

$$(ay_{\bar{x}})_x = -\varphi(x), \tag{69}$$

它的系数 $a(x)$ 和 $\varphi(x)$ 在均衡法、里兹方法和逼近泛函的方法中是用不同的公式计算的. 然而用上述任一种方法计算系数，格式 (69) 的逼近误差都是 $O(h^2)$.

由 § 2 第 2 段推知，如果

$$\frac{a(x+h)+a(x)}{2}=k(x)+O(h^2),$$

$$\frac{a(x+h)-a(x)}{h}=k'(x)+O(h^2),$$

$$\varphi(x)=f(x)+O(h^2),$$

则格式 (69) 是二阶逼近.

对方程 (68) 可以写出精确的三点格式,它的形式为

$$(\mathring{a}y_{\bar{x}})_x=-\mathring{\varphi}(x),\tag{70}$$

其中

$$\mathring{a}_i=\left(\frac{1}{h}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\frac{dx}{k(x)}\right)^{-1},$$

$$\mathring{\varphi}_i=\frac{1}{h^2}\left[\mathring{a}_{i+1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}\frac{dx}{k(x)}\int_{x_i}^{x}f(x')dx'\right.$$

$$\left.+\mathring{a}_i\int_{x_{i-1}}^{x_i}\frac{dx}{k(x)}\int_{x}^{x_i}f(x')dx'\right].$$

微分方程 (68) 的任一解都是差分方程 (70) 的解，即

$$y_i=u_i=u(x_i).$$

为了得到精确格式,对方程 (68) 从 x_i 到 x 积分并除以 $k(x)$:

$$u'(x)=\frac{(ku')_i}{k(x)}+\frac{1}{k(x)}\int_{x_i}^{x}f(x')dx'.\tag{71}$$

再对 (71) 从 x_{i-1} 到 x_i 和从 x_i 到 x_{i+1} 对 x 积分并分别乘以 $\mathring{a}_ih^{-1}$ 和 $\mathring{a}_{i+1}h^{-1}$，得

$$\mathring{a}_i\frac{u_i-u_{i-1}}{h}=(ku')_i+\mathring{a}_i\frac{1}{h}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\frac{dx}{k(x)}\int_{x_i}^{x}f(x')dx',$$

$$\mathring{a}_{i+1}\frac{u_{i+1}-u_i}{h}=(ku')_i+\mathring{a}_{i+1}\frac{1}{h}\int_{x_i}^{x_{i+1}}\frac{dx}{k(x)}\int_{x_i}^{x}f(x')dx'.$$

由此消去 $(ku')_i$ 得到 $(\mathring{a}u_{\bar{x}})_x=-\mathring{\varphi}(x)$，其中 $\mathring{a}$ 和 $\mathring{\varphi}$ 由前式确定.

当然,实际利用这个格式是很困难的,因为 $\mathring{a}_i$, $\mathring{\varphi}_i$ 式中有

积分，而这些积分的计算精度，显然，决定着格式的实际精度.

对二阶方程

$$\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}\right)-q(x)u=-f(x),\quad 0<x<1,$$

可以构造三点一致格式，它对任意的非均匀网格都是精确的. 这时利用另一种方法，这个方法的依据是，上述二阶方程在任意点上的解可以用这个方程在包含该点的任意区间端点处的值表示出来. 取网格节点作为这三个点，则得三点差分格式. 它的形式为

$$(ay_{\bar{x}})_x-dy=-\varphi,$$

其系数 a, d, φ 是微分方程系数 $k(x)$, $q(x)$, $f(x)$ 的泛函.

现在我们对方程(68)直接研究守恒格式逼近误差来得到误差为 $O(h^4)$ 的差分格式. 把方程 (68) 改写成

$$Lu=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{p(x)}\frac{du}{dx}\right)=-f(x),\quad p(x)=\frac{1}{k(x)}\tag{72}$$

更方便些. 用三点算子

$$\Lambda y=\left(\frac{1}{a}y_{\bar{x}}\right)_x$$

逼近 Lu，这是二阶逼近:

$$\psi=\Lambda u-Lu=O(h^2).$$

正如 §2 第 2 段所证明的，当满足条件

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\left[\frac{1}{a(x+h)}+\frac{1}{a(x)}\right]=\frac{1}{p(x)}+O(h^2),\\&\frac{1}{h}\left[\frac{1}{a(x+h)}-\frac{1}{a(x)}\right]=\left(\frac{1}{p(x)}\right)'+O(h^2)\end{aligned}\tag{73}$$

时该结论是成立的. 假设 $a(x)$ 由线性模式泛函 $A[p(s)]$, $-1\leqslant s\leqslant 0$ 确定，因而

$$a(x)=A[p(x+sh)],\quad -1\leqslant s\leqslant 0.$$

按泰勒公式展开

$$p(x+sh)=p(x)+shp'(x)+\frac{h^2}{2}s^2p''(x)+O(h^3),$$

$$p(x+h+sh)=p(x)+(1+s)hp'(x)+\frac{h^2}{2}(1+s)^2p''(x)+O(h^3),$$

则

$$a(x)=p(x)A[1]+hp'(x)A[s]+\frac{h^2}{2}p''(x)A[s^2]+O(h^3),$$

$$a(x+h)=p(x)A[1]+hp'(x)A[1+s]+\frac{h^2}{2}p''(x)A[(1+s)^2]+O(h^3).$$

把这些表达式代入二阶逼近的条件(73)中．显然，$A[1]=1$.

其次，如果 $A[1+2s]=0$，即 $A[s]=-0.5$，则有

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{h}\left[\frac{1}{a(x+h)}-\frac{1}{a(x)}\right]\\
&=\frac{1}{hp(x)}\left[\left(1-\frac{hp'}{p}A[1+s]-\frac{h^2}{2p}p''A[(1+s)^2]\right.\right.\\
&\quad\left.+h^2\left(\frac{p'}{p}\right)^2A^2[1+s]+O(h^3)\right)\\
&\quad-\left(1-\frac{hp'}{p}A[s]-\frac{h^2}{2p}p''A[s^2]\right.\\
&\quad\left.\left.+h^2\left(\frac{p'}{p}\right)^2A^2[s]+O(h^3)\right)\right]\\
&=\left(\frac{1}{p}\right)'-\frac{h}{2}\left(\frac{p'}{p^2}\right)'A[1+2s]+O(h^2)\\
&=\left(\frac{1}{p}\right)'+O(h^2).
\end{aligned}$$

这时条件 (73) 中的第一个也满足

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a(x)}+\frac{1}{a(x+h)}\right)=\frac{1}{p(x)}-\frac{hp'}{p^2}A[s+0.5]+O(h^2)$$
$$=\frac{1}{p(x)}+O(h^2).$$

现在来证明，当条件

$$A[1]=1,\quad A[s]=-\frac{1}{2},\ A[s^2]=\frac{1}{3},\qquad (74)$$
$$A[s^3]=-\frac{1}{4}$$

满足时，逼近误差 $\psi=\Lambda u-Lu$ 可以表示为

$$\psi=\Lambda u-Lu=\frac{h^2}{12}L(pLu)+O(h^4)$$
$$=\frac{h^2}{12}\left(\frac{1}{p}(pLu)'\right)'+O(h^4).$$

为此，把 $a(x)$ 在点 $\bar{x}=x-0.5h$ 的邻域展开．记 $p(\bar{x})=\bar{p}(x)$ 等等，则得

$$a(x)=A[p(x+sh)]=A[p(x-0.5h+(s+0.5)h)]$$
$$=A\left[\bar{p}+h(s+0.5)\bar{p}'+\frac{h^2}{2}(s+0.5)^2\bar{p}''\right.$$
$$\left.+\frac{h^3}{6}(s+0.5)^3\bar{p}'''+\frac{h^4}{24}(s+0.5)^4\bar{p}^{(4)}+O(h^5)\right]$$
$$=\bar{p}+h\bar{p}'A\left[s+\frac{1}{2}\right]+\frac{h^2}{2}\bar{p}''A[(s+0.5)^2]$$
$$+\frac{h^3}{6}\bar{p}'''A[(s+0.5)^3]$$
$$+\frac{h^4}{24}\bar{p}^{(4)}A[(s+0.5)^4]+O(h^5).$$

再注意到 $A[s+0.5]=A[s]+0.5=0$，

$$A[(s+0.5)^2]=A\left[s^2+s+\frac{1}{4}\right]=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{1}{12},$$

$$A[(s+0.5)^3]=A[s^3]+\frac{3}{2}A[s^2]+\frac{3}{4}A[s]+\frac{1}{8}$$
$$=-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{3}{8}+\frac{1}{8}=0,$$

可以写出

$$a(x)=\bar{p}+\frac{h^2}{24}\bar{p}''+\frac{h^4}{24}\bar{p}^{(4)}A[(s+0.5)^4]+O(h^5),$$

$$a(x+h)=p(\bar{x}+h)+\frac{h^2}{24}p''(\bar{x}+h)$$
$$+\frac{h^4}{24}p^{(4)}(\bar{x}+h)A[(s+0.5)^4]+O(h^5).$$

我们还要用到表达式

$$u(x)=u(\bar{x})+\frac{h}{2}u'(\bar{x})+\frac{h^2}{8}u''(\bar{x})+\frac{h^3}{48}u'''(\bar{x})$$
$$+\frac{h^4}{16\cdot 24}u^{(4)}(\bar{x})+\frac{h^5}{32\cdot 120}u^{(5)}(\bar{x})+O(h^6),$$

$$u(x-h)=u(\bar{x})-\frac{h}{2}u'(\bar{x})+\frac{h^2}{8}u''(\bar{x})-\frac{h^3}{48}u'''(\bar{x})$$
$$+\frac{h^4}{16\cdot 24}u^{(4)}(\bar{x})-\frac{h^5}{32\cdot 120}u^{(5)}(\bar{x})+O(h^6).$$

由此推知，

$$\frac{1}{a}u_{\bar{x}}=\frac{1}{\bar{p}}\left(1-\frac{h^2}{24}\frac{p''(\bar{x})}{p(\bar{x})}+\alpha(\bar{x})h^4\right)$$
$$\times\left(u'(\bar{x})+\frac{h^2}{24}u'''(\bar{x})+\beta(\bar{x})h^4\right)+O(h^5)$$
$$=\left[\frac{u'}{p}+\frac{h^2}{24}\left(\frac{u'''}{p}-\frac{p''}{p^2}u'\right)\right]_{x=\bar{x}}$$
$$+\gamma(\bar{x})h^4+O(h^5),$$

即

$$\frac{1}{a}u_{\bar{x}}=\left(\frac{u'}{p}\right)_{x=\bar{x}}+h^2\delta(\bar{x})+\gamma(\bar{x})h^4+O(h^5),$$

其中

$$\delta(\bar{x}) = \frac{1}{24}\left(\frac{u'''}{p} - \frac{p''}{p^2}u'\right)_{x=\bar{x}},$$

$$\gamma(\bar{x}) = \frac{\beta(\bar{x})}{p(\bar{x})} + \frac{\alpha(\bar{x})u'(\bar{x})}{p(\bar{x})} - \frac{p''}{576p^2(\bar{x})}u'''(\bar{x}),$$

$$\beta(\bar{x}) = \frac{u^{(5)}(\bar{x})}{16 \cdot 120},$$

$$\alpha(\bar{x}) = -\frac{p^{(4)}(\bar{x})}{p(\bar{x})}\frac{A[(s+0.5)^4]}{24} + \frac{(p''(\bar{x}))^2}{576p^2(\bar{x})}.$$

再利用公式

$$w(\bar{x}) = w(x) - 0.5hw'(x) + \frac{h^2}{8}w''(x) - \frac{h^3}{48}w'''(x) + \frac{h^4}{16 \cdot 24}w^{(4)}(x) + O(h^5),$$

$$w(\bar{x}+h) = w(x) + 0.5hw'(x) + \frac{h^2}{8}w''(x) + \frac{h^3}{48}w'''(x) + \frac{h^4}{16 \cdot 24}w^{(4)}(x) + O(h^5),$$

$$(w(\bar{x}))_x = \frac{w(\bar{x}+h) - w(\bar{x})}{h} = w'(x) + \frac{h^2}{24}w'''(x) + O(h^4).$$

由此以及从 $w = \frac{1}{a}u_{\bar{x}}$ 的公式推出

$$\left(\frac{1}{a}u_{\bar{x}}\right)_x = w_x = \left(\frac{u'}{p}\right)' + \frac{h^2}{24}\left[\left(\frac{u'}{p}\right)'' + \frac{u'''}{p} - \frac{p''}{p^2}u'\right]' + O(h^4).$$

考虑到

$$\left(\frac{u'}{p}\right)'' = \left(\frac{u''}{p} + u'\left(\frac{1}{p}\right)'\right)' = \frac{u'''}{p} + 2\left(\frac{1}{p}\right)'u'' + \left(\frac{1}{p}\right)''u',$$

$$\frac{u''}{p}=\left(\frac{u'}{p}\right)'-\left(\frac{1}{p}\right)'u'=\left(\frac{u'}{p}\right)'+\frac{p'}{p^2}u',$$

$$\left(\frac{1}{p}\right)''=-\left(\frac{p'}{p^2}\right)'=-\frac{p''}{p^2}+\frac{2(p')^2}{p^3},$$

将前式方括号中的表达式变换成

$$\left(\frac{u'}{p}\right)''+\frac{u'''}{p}-\frac{p''}{p^2}u'$$

$$=2\left(\frac{u'}{p}\right)''-\frac{p''}{p^2}u'+\frac{p''}{p^2}u'-2\frac{(p')^2}{p^3}u'+\frac{2p'}{p^2}u''$$

$$=2\left(\frac{u'}{p}\right)''+2\frac{p'}{p}\left(\frac{u'}{p}\right)'$$

$$=2\frac{1}{p}\left(p\left(\frac{u'}{p}\right)'\right)'.$$

于是得到逼近误差的如下表达式:

$$\psi=\Lambda u-Lu=\left(\frac{1}{a}u_{\bar{x}}\right)_x-\left(\frac{1}{p}u'\right)'$$

$$=\frac{h^2}{12}\left(\frac{1}{p}\left(p\left(\frac{u'}{p}\right)'\right)'\right)'+O(h^4),$$

或

$$\psi=\frac{h^2}{12}L(pLu)+O(h^4).$$

假设 $u=u(x)$ 是方程 $Lu=\left(\frac{1}{p}u'\right)'=-f(x)$ 的解,则

$$\psi=-\frac{h^2}{12}L(pf)+O(h^4).$$

因为

$$L(pf)=\left(\frac{1}{p}(pf)'\right)'=\Lambda(pf)+O(h^2),$$

则差分格式

$$\Lambda y=\left(\frac{1}{a}y_{\bar{x}}\right)_x=-\varphi,\ \varphi=f+\frac{h^2}{12}\Lambda(pf) \qquad (75)$$

在方程 $Lu=-f(x)$ 的解 $u=u(x)$ 上具有四阶逼近，因而，如果 $f\in C^{(4)}$, $p\in C^{(5)}$ 且关于线性泛函

$$A[\bar{p}(s)],\quad -1\leqslant s\leqslant 0$$

的条件 (74) 满足，则

$$\psi=\Lambda u+\varphi=O(h^4).$$

我们取最简单的泛函

$$A[\bar{p}(s)]=c_1\bar{p}(-1)+c_2\bar{p}\left(-\frac{1}{2}\right)+c_0\bar{p}(0),$$

其中 c_1, c_2, c_0 是常数. 条件 (74) 给出:

$$A[1]=c_1+c_2+c_0=1,\quad c_2=1-c_0-c_1,$$

$$A[s]=-c_1-0.5c_2=-0.5,\quad c_1+0.5c_2=0.5,$$

$$A[s^2]=c_1+\frac{1}{4}c_2=\frac{1}{3}.$$

由此得到

$$c_1=\frac{1}{6},\quad c_2=\frac{2}{3},\quad c_0=\frac{1}{6}.$$

条件 $A[s^3]=-\frac{1}{4}$ 自动满足.

这样，对于最简单的四阶逼近格式 (75)，系数 a_i 等于

$$a_i=\frac{1}{6}(p_{i-1}+4p_{i-\frac{1}{2}}+p_i).$$

第三章 泊松方程的差分格式．最大值原理

正如第一章所指出的，泊松（拉普拉斯）方程是椭圆型方程最典型的代表之一．这一章将在笛卡儿坐标、极坐标、柱坐标或球面坐标下构造泊松方程各阶逼近的差分格式，然后作出拉普拉斯方程的狄利克雷边界条件的逼近，证明最大值原理并利用它来研究所构造的差分格式的可解性和收敛速度．

§1. 构造泊松方程的差分格式

1. 在笛卡儿坐标下泊松方程的逼近． 设在平面 Ox_1x_2 上给出泊松方程

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}=-f(x),\quad x=(x_1,x_2),\tag{1}$$

并引进沿 Ox_α 方向 $(\alpha=1,2)$ 步长为 h_α 的均匀矩形差分网格 Ω. 在第二章§1已指出了在矩形网格上拉普拉斯方程的最简单差分逼近．利用那里引进的差分算子，方程(1)的最简单逼近显然为

$$\Lambda y\equiv y_{\bar{x}_1x_1}+y_{\bar{x}_2x_2}=-\varphi(x),\tag{2}$$

其中右端 $\varphi(x)$，例如，可选取

$$\varphi(x)=f(x).\tag{3}$$

我们来计算右端为(3)的方程(2)在方程(1)的解 $u=u(x)$ 上的逼近误差．注意到

$$\Lambda_\alpha u = u_{\bar{x}_\alpha x_\alpha} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2} + \frac{h_\alpha^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x_\alpha^4} + \frac{h_\alpha^4}{360}\frac{\partial^6 u}{\partial x_\alpha^6} + O(h_\alpha^6),$$

$$\Delta u = (L_1 + L_2)u = -f(x), \tag{4}$$

$$L_\alpha u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2}, \quad \alpha = 1,2,$$

得

$$\psi(x) = \Lambda u + \varphi(x) = (\Lambda_1 + \Lambda_2)u + \varphi(x)$$

$$= (L_1 + L_2)u + \frac{1}{12}(h_1^2 L_1^2 u + h_2^2 L_2^2 u) + f(x) + O(|h|^4)$$

$$= O(|h|^2),$$

$$|h|^2 = h_1^2 + h_2^2.$$

从而，右端为 (3) 的方程 (2) 是方程 (1) 的二阶逼近.

在写方程 (2) 时所利用的差分算子是在最简单"十字"型五点模式上给出的. 可以证明，在这种模式上不可能构造出误差的阶高于 $O(|h|^2)$ 的差分逼近. 复杂的模式可以构造较高阶的逼近. 例如，在"箱"型的九点模式上可以构造方程 (1) 的误差为 $O(|h|^4)$ 的差分逼近. 如果网格是正方形的即 $h_1 = h_2 = h$, 那末就在这种模式上可以构造 $O(|h|^6)$ 的逼近. 我们来构造上述逼近. 由 (4) 推出:

$$\Lambda u = (L_1 + L_2)u + \frac{1}{12}(h_1^2 L_1^2 + h_2^2 L_2^2)u + O(|h|^4)$$

$$= (L_1 + L_2)u + \frac{1}{12}(h_1^2 L_1 + h_2^2 L_2)(L_1 + L_2)u$$

$$- \frac{h_1^2 + h_2^2}{12} L_1 L_2 u + O(|h|^4). \tag{5}$$

将 $\Delta u = (L_1 + L_2)u = -f(x)$ 代入上式，得到

$$\Lambda u = -f(x) - \frac{1}{12}(h_1^2 L_1 + h_2^2 L_2) f(x)$$

$$- \frac{h_1^2 + h_2^2}{12} L_1 L_2 u + O(|h|^4).$$

用差分表达式代替 $L_1L_2u=\dfrac{\partial^4 u}{\partial x_1^2\partial x_2^2}$,

$$L_1L_2u=u_{\bar{x}_1x_1\bar{x}_2x_2}+O(|h|^2)=\Lambda_1\Lambda_2u+O(|h|^2).$$

结果得到

$$\Lambda u+\frac{h_1^2+h_2^2}{12}\Lambda_1\Lambda_2u=-\left(f(x)+\sum_{\alpha=1}^{2}\frac{h_\alpha^2}{12}L_\alpha f\right)+O(|h|^4).$$

由此推知，差分方程

$$\Lambda' y\equiv\Lambda y+\frac{h_1^2+h_2^2}{12}\Lambda_1\Lambda_2y=-\varphi(x),\tag{6}$$

其中右端

$$\varphi(x)\equiv f(x)+\sum_{\alpha=1}^{2}\frac{h_\alpha^2}{12}\frac{\partial^2 f}{\partial x_\alpha^2}\tag{7}$$

在 (1) 的解 $u=u(x)$ 上以 $O(|h|^4)$ 的误差逼近方程 (1).

给出方程 (6) 右端的公式 (7) 由于必需利用 $f(x)$ 的导数，所以对于计算不总是方便的. 但是这些导数可以代之以它们的差分逼近. 注意到

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_\alpha^2}=f_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}+O(h_\alpha^2),$$

我们取方程 (6) 的右端为

$$\begin{aligned}\varphi(x)&=f(x)+\sum_{\alpha=1}^{2}\frac{h_\alpha^2}{12}f_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}\\&=f(x)+\frac{1}{12}(h_1^2\Lambda_1 f+h_2^2\Lambda_2 f).\end{aligned}\tag{7'}$$

这时，格式的逼近误差和原来一样是 4 阶的: $\psi=O(|h|^4)$.

现在我们在正方形网格上(即 $h_1=h_2=h$) 构造具有 6 阶逼近的格式.

利用展开式 (4) 得到

$$\Lambda u=\Lambda_1u+\Lambda_2u=(L_1+L_2)u+\frac{h^2}{12}(L_1^2+L_2^2)u$$

$$+\frac{h^4}{360}(L_1^3+L_2^3)u+O(|h|^6).$$

由于方程 $(L_1+L_2)u=-f(x)$ 及关系式

$$(L_1^2+L_2^2)u=(L_1+L_2)^2u-2L_1L_2u$$
$$=-(L_1+L_2)f-2L_1L_2u,$$
$$(L_1^3+L_2^3)u=(L_1^2-L_1L_2+L_2^2)(L_1+L_2)u$$
$$=-(L_1^2-L_1L_2+L_2^2)f,$$

上式可写为

$$\Lambda u=-f(x)-\frac{h^2}{12}(L_1+L_2)f-\frac{h^4}{360}(L_1^2-L_1L_2+L_2^2)f$$
$$-\frac{h^2}{6}L_1L_2u+O(|h|^6).$$

为了将 L_1L_2u 用它的具有精度 $O(h^6)$ 的差分模拟代替,我们注意到(4),结果得到

$$\Lambda_1\Lambda_2u=L_1L_2u+\frac{h^2}{12}L_1L_2(L_1+L_2)u+O(h^4)$$
$$=L_1L_2u-\frac{h^2}{12}L_1L_2f+O(h^4).$$

因此可写成

$$\Lambda'u=\Lambda u+\frac{h^2}{6}\Lambda_1\Lambda_2u=-\varphi(x)+O(h^6),$$

其中

$$\varphi(x)=f(x)+\frac{h^2}{12}\Delta f+\frac{h^4}{360}(\Delta^2f+2L_1L_2f). \qquad (8)$$

由此看出,格式

$$\Lambda'y=-\varphi(x), \qquad (9)$$

如果右端 $\varphi(x)$ 按(8)确定,则它在正方形网格上以 $O(h^6)$ 的误差逼近方程(1).

(9)式右端也可取别的函数,它保持格式的逼近阶但不

包含函数 $f(x)$ 的导数. 将表达式

$$\Delta f = \Lambda f - \frac{h^2}{12}(\Lambda_1^2 + \Lambda_2^2)f + O(h^4),$$

$$\Delta^2 f = (\Lambda_1 + \Lambda_2)^2 f + O(h^2)$$
$$= \Lambda_1^2 f + 2\Lambda_1\Lambda_2 f + \Lambda_2^2 f + O(h^2),$$

$$L_1 L_2 f = \Lambda_1\Lambda_2 f + O(h^2)$$

代入 (8) 且仅保留至 $O(h^4)$ 的项，我们得到方程 (9) 的右端 $\varphi(x)$ 的表达式

$$\varphi = f + \frac{h^2}{12}(\Lambda_1 + \Lambda_2)f - \frac{h^4}{240}(\Lambda_1^2 + \Lambda_2^2)f + \frac{h^4}{90}\Lambda_1\Lambda_2 f. \quad (8')$$

公式 (8′) 对于计算可能更为方便.

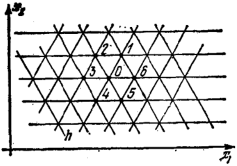


图 6

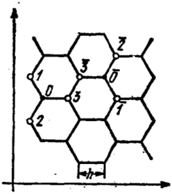


图 7

有时,在正方形网格上,由节点

$$(x_1, x_2),\quad (x_1 - h, x_2 - h),\quad (x_1 - h, x_2 + h),$$
$$(x_1 + h, x_2 + h),\quad (x_1 + h, x_2 - h),$$

组成的"斜十字"五点模式可用来逼近方程 (1). 这种逼近用下述方式构造. 众所周知，拉普拉斯算子关于坐标系的旋转是不变的. 我们将原坐标系旋转角度 $\frac{\pi}{4}$，而网格不动. 这

样上面所指出的模式在新的坐标系下将是通常的“十字”模式，只是他们相邻节点间的距离是 $\sqrt{2h}$，而不是 h．于是，新的方程在这种模式上可以用通常的方法逼近，而这个逼近在老坐标系下取如下的形式：

$$\frac{1}{2h^2}\{y(x_1-h,x_2-h)+y(x_1-h,x_2+h)$$
$$+y(x_1+h,x_2-h)+y(x_1+h,x_2+h)-4y(x_1,x_2)\}$$
$$=-f(x_1,x_2). \tag{10}$$

利用第二章 § 1 的记号，改写方程 (10) 就得到

$$y_{\bar{x}_1x_1}+y_{\bar{x}_2x_2}+\frac{h^2}{2}y_{\bar{x}_1x_1\bar{x}_2x_2}=\Lambda_1y+\Lambda_2y+\frac{h^2}{2}\Lambda_1\Lambda_2y$$
$$=-f(x). \tag{11}$$

显然，方程 (11) 的逼近误差是 $O(h^2)$ 的量级．

2. 六角形网格和三角形网格．为了逼近泊松方程，除了矩形网格和正方形网格外，有时还采用由边长为 h 的正三角形（图 6）或正六角形（图 7）组成的正规网格．

现在我们在这些网格上构造方程 (1) 的差分逼近．首先指出，在六角形网格上用逼近 (1) 中导数的方法来构造方程 (1) 的差分逼近是不可能的，这是因为逼近任何方向的二阶导数要求在沿这个方向的直线上至少有三个点．我们在三角形网格上构造格式时也不采用这种途径．

设 $x^{(0)}$ 是某个网格上的一个节点，而 $x^{(i)}$，$i=1,2,\cdots,n$ 是它的相邻节点．从 $x^{(0)}$ 引出 n 条射线通过 $x^{(0)}$ 的相邻点 $x^{(i)}$．记这些射线为 $l_1,l_2,\cdots,l_n$．射线 l_i 与 x_1 轴的夹角记为 $\theta_i=\theta+\frac{2\pi i}{n}$，其中 θ 角是初始读数．我们用关系式

$$y_{l_i}=\frac{y(x^{(i)})-y(x^{(0)})}{h},\quad i=1,2,\cdots,n$$

引进沿射线 l_i 的右差商并构造算子

$$\mathscr{L} y = \sum_{i=1}^{n} y_{l_i}. \tag{12}$$

我们考察当 $h \to 0$ 时它的渐近状态，显然

$$\mathscr{L} u = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial l_i} + \frac{h}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial l_i^2} + \frac{h^2}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial l_i^3} + \frac{h^3}{24} \frac{\partial^4 u}{\partial l_i^4} + \frac{h^4}{120} \frac{\partial^5 u}{\partial l_i^5} \right) + O(h^5). \tag{13}$$

现在用关于 x_1 及 x_2 的导数来表示在 (13) 中出现的沿 l_i 的方向导数．经过简单的计算得到

$$\frac{\partial}{\partial l_i} = \cos\theta_i \frac{\partial}{\partial x_1} + \sin\theta_i \frac{\partial}{\partial x_2},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial l_i^2} = \frac{1}{2} \Delta + \frac{1}{2} \cos 2\theta_i \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) + \sin 2\theta_i \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2},$$

$$\frac{\partial^3}{\partial l_i^3} = \frac{\cos 3\theta_i}{4} \left(\frac{\partial^3}{\partial x_1^3} - 3 \frac{\partial^3}{\partial x_1 \partial x_2^2} \right) + \frac{\sin 3\theta_i}{4} \left(3 \frac{\partial^3}{\partial x_1^2 \partial x_2} - \frac{\partial^3}{\partial x_2^3} \right) + \frac{3}{4} \left(\cos\theta_i \frac{\partial}{\partial x_1} + \sin\theta_i \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \Delta,$$

$$\frac{\partial^4}{\partial l_i^4} = \frac{3}{8} \Delta^2 + \frac{\cos 4\theta_i}{8} \left(\Delta^2 - 8 \frac{\partial^4}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} \right) + \frac{\sin 4\theta_i}{2} \left(\frac{\partial^4}{\partial x_1^3 \partial x_2} - \frac{\partial^4}{\partial x_1 \partial x_2^3} \right) + \frac{\cos 2\theta_i}{2} \left(\frac{\partial^4}{\partial x_1^4} - \frac{\partial^4}{\partial x_2^4} \right) + \sin 2\theta_i \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \Delta,$$

$$\frac{\partial^5}{\partial l_i^5} = \frac{5}{8} \left(\cos\theta_i \frac{\partial}{\partial x_1} + \sin\theta_i \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \Delta^2 + \frac{5 \cos 3\theta_i}{16} \left(\frac{\partial^5}{\partial x_1^5} - 2 \frac{\partial^5}{\partial x_1^3 \partial x_2^2} - 3 \frac{\partial^5}{\partial x_1 \partial x_2^4} \right)$$

$$
\begin{aligned}
&- \frac{5\sin 3\theta_i}{16}\left(-3\frac{\partial^5}{\partial x_1^4\partial x_2} - 2\frac{\partial^5}{\partial x_1^2\partial x_2^3} + \frac{\partial^5}{\partial x_2^5}\right) \\
&+ \frac{\cos 5\theta_i}{16}\left(\frac{\partial^5}{\partial x_1^5} + 5\frac{\partial^5}{\partial x_1\partial x_2^4} - 10\frac{\partial^5}{\partial x_1^3\partial x_2^2}\right) \\
&+ \frac{\sin 5\theta_i}{16}\left(\frac{\partial^5}{\partial x_2^5} + 5\frac{\partial^5}{\partial x_1^4\partial x_2} - 10\frac{\partial^5}{\partial x_1^2\partial x_2^3}\right). \quad (14)
\end{aligned}
$$

把关系式(14)代入(13)并注意到

$$
\sum_{i=1}^{n}\cos\alpha\theta_i = \cos\alpha\left(\theta + \frac{n+1}{n}\pi\right) \times \begin{cases} \dfrac{\sin\alpha\pi}{\sin(\alpha\pi/n)} & \text{当 } \dfrac{\alpha}{n} \neq 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \cdots, \\ (-1)^{\alpha(n+1)/n} n & \text{当 } \dfrac{\alpha}{n} = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \cdots, \end{cases} \quad (15)
$$

$$
\sum_{i=1}^{n}\sin\alpha\theta_i = \sin\alpha\left(\theta + \frac{n-3}{n}\pi\right) \times \begin{cases} \dfrac{\sin\alpha\pi}{\sin(\alpha\pi/n)} & \text{当 } \dfrac{\alpha}{n} \neq 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \cdots, \\ (-1)^{\alpha(n-1)/n} n & \text{当 } \dfrac{\alpha}{n} = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \cdots. \end{cases} \quad (16)
$$

结果得到(当 $n \geqslant 3$ 时)

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L}u = {} & \frac{nh}{4}\Delta u + \frac{nh^3}{64}\Delta^2 u + \delta_{n,3}\frac{h^2}{8}\left\{\cos 3\theta\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x_1^3} - 3\frac{\partial^3 u}{\partial x_1\partial x_2^2}\right) + \sin 3\theta\left(3\frac{\partial^3 u}{\partial x_1^2\partial x_2} - \frac{\partial^3 u}{\partial x_2^3}\right)\right\} \\
& - \delta_{n,4}\frac{h^3}{48}\left\{\left(\Delta^2 u - 8\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^2\partial x_2^2}\right)\cos 4\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) + 16\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^3\partial x_2} - \frac{\partial^4 u}{\partial x_1\partial x_2^3}\right)\sin 4\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)\right\} \\
& + (\delta_{n,5} + \delta_{n,3})O(h^4) + O(h^5). \quad (17)
\end{aligned}
$$

其中 $\delta_{n,i}$ 是克罗内克符号. 由(17)推知,对于任意 $n \geqslant 3$,

算子 $\mathscr{L}$ 乘以 $4/(nh)$ 以后将逼近拉普拉斯算子．引进记号

$$\Lambda=\frac{4}{nh}\mathscr{L}. \tag{18}$$

于是由 (17) 式可知，在三角形网格上 ($n=6$) 差分方程

$$\Lambda y=-\varphi(x) \tag{19}$$

其中

$$\varphi(x)=f(x)+\frac{h^2}{16}\Delta f \tag{20}$$

以误差 $O(h^4)$ 逼近方程(1)．在六角形网格上方程

$$\Lambda y=-\varphi(x),\quad \varphi(x)=f(x) \tag{21}$$

(Λy 的表达式我们没有写出) 以误差 $O(h)$ 逼近方程(1),并且由于在这种网格上有两种模式,对应于 $\theta=0$ 及 $\theta=\pi$, 所以

$$\psi(x^{(0)})=\frac{h}{6}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x_1^3}-3\frac{\partial^3 u}{\partial x_1\partial x_2^2}\right)+O(h^2),$$

$$\psi(\bar{x}^{(0)})=-\frac{h}{6}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x_1^3}-3\frac{\partial^3 u}{\partial x_1\partial x_2^2}\right)+O(h^2).$$

3. 非均匀网格的拉普拉斯差分算子．我们再讨论一个逼近方程

$$\Delta u=-f$$

的例子,设 Ω 是平面 Ox_1x_2 上的任意非均匀网格:

$$\Omega=\{(x_1^{(i_1)},x_2^{(i_2)})\,|\,i_\alpha=0,\pm1,\pm2,\cdots,\alpha=1,2\}.$$

沿 x_α 方向的网格步长等于

$$h_\alpha^{(i_\alpha)}=x_\alpha^{(i_\alpha)}-x_\alpha^{(i_\alpha-1)}$$

且仅依赖于 i_α; 沿这个方向的网格平均步长是

$$\hbar_\alpha=\hbar_\alpha^{(i_\alpha)}=\frac{1}{2}(h_\alpha+h_\alpha^+),\quad h_\alpha=h_\alpha^{(i_\alpha)},\quad h_\alpha^+=h_\alpha^{(i_\alpha+1)}.$$

出现在方程(1)中的导数,我们将用第二章 § 1 类型的关系式去逼近:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2} \sim \frac{1}{\hbar_\alpha}\left(\frac{u^{(+1_\alpha)} - u}{h_\alpha^+} - \frac{u - u^{(-1_\alpha)}}{h_\alpha}\right) = u_{\bar{x}_\alpha \hat{x}_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2,$$

其中

$$u^{(\pm 1_1)} = u(x_1^{(i_1 \pm 1)}, x_2^{(i_2)}), \qquad u^{(\pm 1_2)} = u(x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_2 \pm 1)}).$$

在非均匀网格 Ω 上逼近泊松方程 $\Delta u = -f$ 的差分方程可写为下述形式

$$\Lambda y = y_{\bar{x}_1 \hat{x}_1} + y_{\bar{x}_2 \hat{x}_2} = -f(x), \quad x \in \Omega. \tag{22}$$

逼近误差

$$\psi = \Lambda u + f = u_{\bar{x}_1 \hat{x}_1} + u_{\bar{x}_2 \hat{x}_2} + f(x),$$

其中 u 是方程 $\Delta u + f = 0$ 的解，它可写成如下形式：

$$\psi = (\Delta u + f) + \frac{1}{6}\sum_{\alpha=1}^{2}\left(h_\alpha^2 \frac{\partial^3 u}{\partial x_\alpha^3}\right)_{\hat{x}_\alpha} + O(\hbar_1^2 + \hbar_2^2)$$

$$= \frac{1}{6}\sum_{\alpha=1}^{2}\left(h_\alpha^2 \frac{\partial^3 u}{\partial x_\alpha^3}\right)_{\hat{x}_\alpha} + O(\hbar_1^2 + \hbar_2^2).$$

事实上，将 $u^{(\mp 1_\alpha)}$ 在节点 $x = (x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_2)})$ 的邻域按 h_α 和 h_α^+ 的幂展开，就有

$$u_{x_\alpha} = \frac{u^{(+1_\alpha)} - u}{h_\alpha^+}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} + \frac{h_\alpha^+}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2} + \frac{(h_\alpha^+)^2}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x_\alpha^3} + O((h_\alpha^+)^3),$$

$$u_{\bar{x}_\alpha} = \frac{u - u^{(-1_\alpha)}}{h_\alpha}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} - \frac{h_\alpha}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2} + \frac{h_\alpha^2}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x_\alpha^3} + O(h_\alpha^3).$$

从而

$$u_{\bar{x}_\alpha \hat{x}_\alpha} = \frac{1}{\hbar_\alpha}(u_{x_\alpha} - u_{\bar{x}_\alpha})$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2} + \frac{1}{6\hbar_\alpha}((h_\alpha^+)^2 - h_\alpha^2)\frac{\partial^3 u}{\partial x_\alpha^3} + O(\hbar_\alpha^2),$$

把表达式

$$(h_\alpha^+)^2 \frac{\partial^3 u}{\partial x_\alpha^3} = (h_\alpha^+)^2 \left[\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x_\alpha^3}\right)^{(+1_\alpha)} + O(h_\alpha^+)\right]$$

代入上式得到

$$u_{\bar{x}_\alpha \hat{x}_\alpha} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2} + \frac{1}{6}\left(h_\alpha^2 \frac{\partial^3 u}{\partial x_\alpha^3}\right)_{\hat{x}_\alpha} + O(\hbar_\alpha^2).$$

4. 在极坐标下泊松方程的逼近. 如果要求在圆、环、扇形或环状扇形区域内解泊松方程 (1)，则方程(1)自然在极坐标网格上来逼近. 在极坐标 (r, φ) 下的泊松方程为

$$\Delta_{r,\varphi} u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = -f(r, \varphi), \quad (23)$$

其中 $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, $\operatorname{tg}\varphi = x_2/x_1$, 而平面 Ox_1x_2 映射为半条形 $\{0 \leqslant r < \infty,\ 0 \leqslant \varphi < 2\pi\}$.

方程 (23) 的系数当 $r = 0$ 时具有奇异性，因此为了选出我们感兴趣的解，这里需要附加以补充条件，通常感兴趣的是当 $r = 0$ 时的有界解，而这种解满足条件

$$\lim_{r \to 0} r \frac{\partial u}{\partial r} = 0. \quad (24)$$

这样，除方程 (23) 外，我们还需要逼近条件 (24)，借助于专门选取的网格来计算条件(24)是最方便的. 我们就这样来进行. 对变量 φ 引进以 h_φ 为步长的均匀网格

$$\omega_\varphi = \{\varphi_m = mh_\varphi,\ m = 0, 1, \cdots, M-1,\ h_\varphi = 2\pi/M\},$$

对变量 r 引进步长为 h_r，且平移了半个步长的均匀网格

$$\omega_r = \{r_n = (n + 0.5)h_r,\ n = 0, 1, 2, \cdots,\ h_r > 0\}.$$

在半条形上的网格是

$$\Omega = \omega_r \times \omega_\varphi = \{(r_n, \varphi_m),\ r_n \in \omega_r,\ \varphi_m \in \omega_\varphi\}.$$

从网格点中除去坐标 $r = 0$ 的点，我们就摆脱了当 $r = 0$ 时逼近方程的必要性，但产生了当 $r = h_r/2$ 时逼近方程(23)的问题. 如果按 r 已经引进了未平移的均匀网格而坐标为 $r =$

0 的点已计入了节点，则为了写出当 $r=0$ 的方程，势必要利用方程 (1) 的笛卡儿坐标形式和应用算子 (18)，(12) (此时 $h=h_r$，$n=M$)，亦即差分方程当 $r=0$ 时包含有 $M+1$ 个未知量，这对格式的使用很不方便.

在网格 Ω 上当 $r\neq 0.5h_r$ 时方程 (23) 的逼近不会有困难，就是说，算子 L_φ 的逼近显然可用

$$L_\varphi v=\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2}\sim\Lambda_\varphi v=\frac{1}{r^2}v_{\bar\varphi\varphi}, \tag{25}$$

而算子 L_r 可像变系数算子(见第二章 § 3) 那样逼近

$$L_r v=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right)\sim\Lambda_r v=\frac{1}{r}(\rho v_{\bar r})_r,$$

其中 $\rho(r)=r-h_r/2$. 这样，当 $r\neq\frac{h_r}{2}$ 时方程 (23) 的逼近可取为下列形式

$$\Lambda y=\frac{1}{r}(\rho y_{\bar r})_r+\frac{1}{r^2}y_{\bar\varphi\varphi}=-f(r,\varphi),\quad r\neq\frac{h_r}{2}, \tag{26}$$

$$\Lambda=\Lambda_r+\Lambda_\varphi.$$

为了写出当 $r=\frac{h_r}{2}$ 时的差分方程，我们用均衡法. 将方程 (23) 乘以 r 并将它由 ε 到 h_r 对 r 积分再由 $\varphi_m-\frac{h_\varphi}{2}$ 到 $\varphi_m+\frac{h_\varphi}{2}$ 对 φ 积分. 注意到条件 (24)，在所得到的关系式中取极限 (当 $\varepsilon\to 0$)，于是得到

$$h_r\int_{\varphi_m-\frac{h_\varphi}{2}}^{\varphi_m+\frac{h_\varphi}{2}}\frac{\partial u}{\partial r}(h_r,\varphi)d\varphi+\int_0^{h_r}\frac{1}{r}\left[\frac{\partial u}{\partial\varphi}\left(r,\varphi_m+\frac{h_\varphi}{2}\right)-\frac{\partial u}{\partial\varphi}\left(r,\varphi_m-\frac{h_\varphi}{2}\right)\right]dr$$
$$+\int_0^{h_r}rdr\int_{\varphi_m-\frac{h_\varphi}{2}}^{\varphi_m+\frac{h_\varphi}{2}}f(r,\varphi)d\varphi=0. \tag{27}$$

现在用中矩形求积公式来逼近 (27) 中的每一个积分，得到

$$h_r h_\varphi \frac{\partial u}{\partial r}(h_r, \varphi_m) + 2\left[\frac{\partial u}{\partial \varphi}\left(\frac{h_r}{2}, \varphi_m + \frac{h_\varphi}{2}\right) - \frac{\partial u}{\partial \varphi}\left(\frac{h_r}{2}, \varphi_m - \frac{h_r}{2}\right)\right] + \frac{h_r^2 h_\varphi}{2} f\left(\frac{h_r}{2}, \varphi_m\right) \approx 0.$$

为了得到节点 $\left(\frac{h_r}{2}, \varphi_m\right)$ 上的差分方程，我们用相应的差商来代替上一关系式中出现的导数

$$h_r h_\varphi y_r(r_0, \varphi_m) + 2h_\varphi y_{\bar{\varphi}\varphi}(r_0, \varphi_m) + \frac{h_r^2 h_\varphi}{2} f(r_0, \varphi_m) = 0,$$

其中 $y_r(r_0, \varphi_m) = \frac{1}{h_r}[y(r_0 + h_r, \varphi_m) - y(r_0, \varphi_m)]$.

由此，除以 $\frac{1}{2}h_r^2 h_\varphi$ 后得到

$$\frac{2}{h_r} y_r(r_0, \varphi_m) + \frac{4}{h_r^2} y_{\bar{\varphi}\varphi}(r_0, \varphi_m) = -f(r_0, \varphi_m),$$

$$\text{当 } r = \frac{h_r}{2}.$$

我们将 $h_r = 2r_0$ 代入上式并注意到

$$\rho^{(+1_r)}(r_0) = r_1 - \frac{h_r}{2} = h_r,$$

结果得到方程

$$\frac{1}{r h_r} \rho^{(+1_r)} y_r + \frac{1}{r^2} y_{\bar{\varphi}\varphi} = -f(r, \varphi),$$

$$\text{当 } r = r_0 = \frac{h_r}{2} \text{ 时}, \tag{28}$$

这样，在网格 Ω 的所有节点上方程 (23) 的逼近均已建立．应当指出，其实方程 (28) 可以从方程 (26) 推得，如果在 (26) 中令 $r = h_r/2$.

实际上，因为

$$\Lambda_r y = \frac{1}{r}(\rho y_{\bar{r}})_r = \frac{1}{r h_r}(\rho^{(+1_r)} y_r - \rho y_{\bar{r}})\Big|_{r=\frac{h_r}{2}},$$

而 $\rho(h_r/2)=0$，所以方程(26)在网格 Ω 的所有节点 (r_n,φ_m) 上，当 $n \geqslant 0,\ 0 \leqslant m \leqslant M-1$ 时可以认为已经给出．我们引进下面的记号：

$$\bar{\Lambda}_r v = \begin{cases} \dfrac{1}{r}(\rho v_{\bar{r}})_r, & \text{当 } r \neq h_r/2, \\ \dfrac{1}{r h_r}\rho^{(+1_r)} v_r & \text{当 } r = h_r/2 \ (n=0). \end{cases} \tag{29}$$

那末注意到公式 (26)，(28)，(29)，方程 (23) 在整个网格上的逼近具有下面的形式

$$\bar{\Lambda} y = \bar{\Lambda}_r y + \Lambda_\varphi y = -f(r,\varphi), \quad (r,\varphi) \in \Omega. \tag{30}$$

我们来计算差分方程 (30) 的逼近误差．显然，

$$\Lambda_\varphi u = \frac{1}{r^2} u_{\bar{\varphi}\varphi} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}\Big|_{\varphi=\varphi_m} + \frac{h_\varphi^2}{12 r^2}\widetilde{\frac{\partial^4 u}{\partial \varphi^4}},$$

其中

$$\widetilde{\frac{\partial^4 u}{\partial \varphi^4}} = \frac{\partial^4}{\partial \varphi^4} u(\tilde{\varphi}, r), \quad \tilde{\varphi} \in [\varphi_{m-1}, \varphi_m].$$

现较详细地计算算子 Λ_r 的逼近误差．将 $u^{(\pm 1_r)}$ 按 h_r 幂展开，得到

$$\begin{aligned} u(r_n + h_r,\ \varphi_m) &= u(r_{n+1}, \varphi_m) \\ &= \left(u + h_r \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{h_r^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{h_r^3}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial r^3}\right)_{r=r_n} + \frac{h_r^4}{24}\overline{\frac{\partial^4 u}{\partial r^4}}, \\ u(r_n - h_r,\ \varphi_m) &= u(r_{n-1}, \varphi_m) \\ &= \left(u - h_r \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{h_r^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right. \end{aligned}$$

$$- \frac{h_r^3}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial r^3}\Big)_{r=r_n} + \frac{h_r^4}{24}\overline{\overline{\frac{\partial^4 u}{\partial r^4}}},$$

其中

$$\overline{\frac{\partial^4 u}{\partial r^4}} = \frac{\partial^4}{\partial r^4}u(\bar{r}_n, \varphi_m), \quad \bar{r}_n \in [r_n, r_{n+1}],$$

$$\overline{\overline{\frac{\partial^4 u}{\partial r^4}}} = \frac{\partial^4}{\partial r^4}u(\bar{\bar{r}}_n, \varphi_m), \quad \bar{\bar{r}}_n \in [r_{n-1}, r_n].$$

由此推出

$$u_r = \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{h_r}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{h_r^2}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial r^3}\right)_{r=r_n} + \frac{h_r^3}{24}\overline{\frac{\partial^4 u}{\partial r^4}},$$

$$u_{\bar{r}} = \left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{h_r}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{h_r^2}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial r^3}\right)_{r=r_n} - \frac{h_r^3}{24}\overline{\overline{\frac{\partial^4 u}{\partial r^4}}}.$$

然后再注意到 $\rho(r_n) = r_n - 0.5h_r$，$\rho^{(+1_r)} = \rho(r_{n+1}) = r_n + 0.5h_r$，我们得到

$$\Lambda_r u = \frac{1}{r}(\rho u_{\bar{r}})_r = \frac{1}{rh_r}(\rho^{(+1_r)}u_r - \rho u_{\bar{r}}) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)$$
$$+ \frac{h_r^2}{6r}\Big[\frac{\partial^3 u}{\partial r^3} + \frac{1}{4}(r + 0.5h_r)\overline{\frac{\partial^4 u}{\partial r^4}}$$
$$+ \frac{1}{4}(r - 0.5h_r)\overline{\overline{\frac{\partial^4 u}{\partial r^4}}}\Big],$$

因此

$$\psi(r_n, \varphi_m) = (\Delta_{r,\varphi}u + f)_{r=r_n, \varphi=\varphi_m}$$
$$+ \frac{h_r^2}{6r}\Big[\frac{\partial^3 u}{\partial r^3} + \frac{1}{4}\left(r + \frac{h_r}{2}\right)\overline{\frac{\partial^4 u}{\partial r^4}}$$
$$+ \frac{1}{4}\left(r - \frac{h_r}{2}\right)\overline{\overline{\frac{\partial^4 u}{\partial r^4}}}\Big]_{r=r_n} + \frac{h_\varphi^2}{12r^2}\widetilde{\frac{\partial^4 u}{\partial \varphi^4}}. \qquad (31)$$

当 $r = r_0 = \frac{h_r}{2}$ 时，因为 $\rho^{(+1_r)} = h_r$，有

$$\Lambda_r u = \frac{1}{r h_r} \rho^{(+1_r)} u_r = \frac{h_r}{r h_r} u_r.$$

把表达式

$$u_r\big|_{r=0.5h_r} = \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{h_r}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{h_r^2}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial r^3}\right)_{r=0.5h_r} + \frac{h_r^3}{24}\overline{\frac{\partial^4 u}{\partial r^4}}$$
$$= \left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{h_r^2}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial r^3}\right)_{r=0.5h_r} + \frac{h_r^3}{24}\overline{\frac{\partial^4 u}{\partial r^4}},$$

代入上式得到

$$\Lambda_r u = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{h_r^2}{6r}\frac{\partial^3 u}{\partial r^3}\right)_{r=0.5h_r} + \frac{h_r^3}{24r}\overline{\frac{\partial^4 u}{\partial r^4}}.$$

应当指出，在写出展式 (31) 时，我们并没有利用条件 (24)，所以当条件 (24) 不满足时，(31) 式仍然成立．而且，如果把方程 (30) 看作已知的，且撇开在 $r = 0.5h_r$ 处构造方程的方式，则条件 (24) 还是没有明显地利用，因此，可能造成这样的印象，即方程 (30) 无须假定 (24) 就能逼近方程(23)．但当然不是这样．如果放弃条件 (24)，则方程 (23) 的解当 $r = 0$ 时具有奇异性，在较好的情形下为 $\ln\frac{1}{r}$ 型．将这个解代入 (31)，当 $r = O(h_r)$ 时得到

$$\psi(r, \varphi) = O(1/h_r^2),$$

也就是说，实际上不是逼近．若假定条件(24)满足，则它不仅保证解在 $r = 0$ 时的有界性，而且保证解的充分光滑性(当右端 $f(r, \varphi)$ 具有适当的光滑性时)．

我们来讨论 (31) 的逼近误差，假定方程 (1) 的解对笛卡儿变量 x_1 及 x_2 有四阶有界导数．这仅当有界性条件 (24) 满足时才有可能．我们证明，关于 r 及 φ 的导数是关于 x_1 及 x_2 的导数的线性组合，且组合的系数是有界的．为此我们用关于 x_1 及 x_2 的导数来表示关于 r 及 φ 的导数．由于

$$x_1 = r\cos\varphi, \quad x_2 = r\sin\varphi,$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial r}=\cos\varphi,\quad \frac{\partial x_2}{\partial r}=\sin\varphi$$

而

$$\frac{\partial x_1}{\partial\varphi}=-r\sin\varphi=-x_2,$$

$$\frac{\partial x_2}{\partial\varphi}=r\cos\varphi=x_1,$$

得到

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{\partial u}{\partial x_1}\cos\varphi+\frac{\partial u}{\partial x_2}\sin\varphi,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\cos^2\varphi+\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}\sin 2\varphi+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\sin^2\varphi.$$

由此看出，导数 $\frac{\partial^3 u}{\partial r^3}$ 及 $\frac{\partial^4 u}{\partial r^4}$ 也可用关于 x_1 和 x_2 的同阶导数线性表示，且系数有界．因此这些导数有界：

$$\left|\frac{\partial^3 u}{\partial r^3}\right|\leqslant M,\quad \left|\frac{\partial^4 u}{\partial r^4}\right|\leqslant M,\quad M=\text{const}>0. \tag{32}$$

类似地可得

$$\frac{\partial u}{\partial\varphi}=-x_2\frac{\partial u}{\partial x_1}+x_1\frac{\partial u}{\partial x_2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=x_2^2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+x_1^2\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}-2x_1x_2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}$$
$$-x_1\frac{\partial u}{\partial x_1}-x_2\frac{\partial u}{\partial x_2}$$

等等．

显然，导数 $\frac{\partial^k u}{\partial\varphi^k}(k\geqslant 1)$ 是变量 x_1 和 x_2 的 k 次多项式，并且次数 $n\leqslant k$ 的项，它的系数是关于 x_1，x_2 或关于 x_1 和 x_2 的 n 阶导数，而零次项不出现．由上所述得到

$$\left|\frac{\partial^3 u}{\partial\varphi^3}\right|\leqslant rM,\quad \left|\frac{\partial^4 u}{\partial\varphi^4}\right|\leqslant rM, \tag{33}$$

其中M是某个正常数．将估计式(32)和(33)代入(31)得到

$$\psi(r,\varphi)=O\left(\frac{h_r^2+h_\varphi^2}{r}\right). \tag{34}$$

这样，仅当条件(24)满足时差分方程(30)才逼近方程(23).

5. 柱坐标下泊松方程的逼近． 如果要求在有限圆柱或圆筒内解泊松方程，则方程自然在柱坐标网格上来逼近．用柱坐标表示的泊松方程的形式为

$$\begin{aligned}\Delta_{r\varphi z}u&=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\\&=-f(r,\varphi,z),\end{aligned} \tag{35}$$

其中 $r=\sqrt{x_1^2+x_2^2}$，$\operatorname{tg}\varphi=x_2/x_1$，$z=x_3$，或

$$\Delta_{r\varphi}u+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-f(r,\varphi,z).$$

用柱坐标和用极坐标表示的泊松方程区别仅在于(35)中多了一项 $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$．对变量 r 和 φ 仍可利用前面引进的网格 ω_r 和 ω_φ，而对变量 z 我们引进步长为 h_z 的均匀网格

$$\omega_z=\{z_k=kh_z\,|\,k=0,\pm1,\pm2,\cdots,h_z>0\}.$$

把网格 Ω 取为如下形式：

$$\begin{aligned}\Omega&=\omega_r\times\omega_\varphi\times\omega_z\\&=\{(r_n,\varphi_m,z_k)\,|\,\varphi_m\in\omega_\varphi,r_n\in\omega_r,z_k\in\omega_z\}.\end{aligned}$$

在这种网格上将逼近方程(35)．我们把拉普拉斯算子表示为和的形式

$$\Delta_{r\varphi z}u=L_r u+L_\varphi u+L_z u,$$

$$L_r u=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right),\quad L_\varphi u=\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2},$$

$$L_z u=\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

在网格 Ω 上算子 L_r 和 L_φ 可以象在极坐标系中那样逼近（见

(29) 和 (25)), 而算子 L_z 用最简单的差分算子逼近

$$\Lambda_z v = v_{\bar{z}z} \sim L_z v = \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}.$$

于是可以把方程 (35) 的差分逼近写成

$$\bar{\Lambda} y = \bar{\Lambda}_r y + \Lambda_\varphi y + \Lambda_z y = -f(r,\varphi,z),$$
$$(r,\varphi,z) \in \Omega, \qquad (36)$$

其中 $\bar{\Lambda}_r$ 及 Λ_φ 由公式 (29) 和 (25) 确定.

格式 (36) 的逼近误差等于

$$\psi = \bar{\Lambda} u + f = \psi_{r,\varphi} + \Lambda_z u,$$

其中 $\psi_{r,\varphi} = \bar{\Lambda}_r u + \Lambda_\varphi u + f$ 表示为 (31) 的形式, 而 $\Lambda_z u = L_z u + O(h_z^2)$.

前段所得到的关于 r 和 φ 的导数的估计在这里仍然成立, 因此对逼近误差有估计式

$$\psi = O\left(\frac{h_r^2 + h_\varphi^2}{r} + h_z^2\right). \qquad (37)$$

6. 球面坐标下泊松方程的逼近. 如果要求在球、球环、球扇形或其他的在映射到球面坐标时变为平行六面体的区域内解泊松方程, 则方程自然在球面坐标上来逼近. 用球面坐标表示的泊松方程的形式为

$$\Delta_{r,\varphi,\theta} u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}$$
$$+ \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)$$
$$= -f(r,\varphi,\theta), \qquad (38)$$

其中

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}, \quad \theta = \arccos\frac{x_3}{r}, \ \operatorname{tg}\varphi = \frac{x_2}{x_1},$$

而空间 $Ox_1x_2x_3$ 在过渡到球面坐标时变成半无穷平行六面体

$$\{0 \leqslant r < \infty, \ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi\}.$$

为方便起见，引进记号

$$L_r u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right),$$

$$L_\varphi u = \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2},$$

$$L_\theta u = \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right),$$

$$\Delta_{r,\varphi,\theta} = L_r + L_\varphi + L_\theta$$

并把方程 (38) 改写成

$$L_r u + L_\varphi u + L_\theta u = -f(r,\varphi,\theta). \tag{38'}$$

对变量 φ 的网格仍可利用前面引进的网格 ω_φ，这时对变量 r 最好应用步长为 h_r 的向右移一步的均匀网格：

$$\omega_r = \{r_n = (n+1)h_r,\ n = 0,1,\cdots,\ h_r > 0\}.$$

对变量 θ 取这样的均匀网格是方便的，它从区间 $[0,\pi]$ 的左端点向右移半步和从这个区间的右端点向左移半步，

$$\omega_\theta = \left\{\theta_i = (i+0.5)h_\theta, i = 0,1,2,\cdots,I-1,\ h_\theta = \frac{\pi}{I}\right\}.$$

结果我们得到在平行六面体上的网格

$$\begin{aligned}\Omega &= \omega_r \times \omega_\varphi \times \omega_\theta \\ &= \{(r_n,\varphi_m,\theta_i), r_n \in \omega_r, \varphi_m \in \omega_\varphi, \theta_i \in \omega_\theta\}.\end{aligned}$$

算子 L_φ 显然可用如下逼近(在节点 (r_n,φ_m,θ_i))

$$\Lambda_\varphi v = \frac{1}{r^2\sin^2\theta}v_{\bar\varphi\varphi} \sim L_\varphi v = \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2}. \tag{39}$$

算子 L_r 作为具有变系数的算子可用均衡法并利用第二章§3的关系式(6)来逼近(见第二章 § 3). 注意到这一点即得

$$\Lambda_r v = \frac{1}{r^2}(\rho v_{\bar r})_r \sim L_r v = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial v}{\partial r}\right), \tag{40}$$

其中 $\rho = \rho(r) = r r^{(-1_r)} = r(r-h_r)$，$r \geqslant h_r$. 表达式(40)当 $r = h_r$ 时成为

$$\Lambda_r v = \frac{1}{r^2 h_r}\rho^{(+1_r)} v_r, \quad \rho^{(+1_r)} = r(r + h_r) = 2h_r^2, \qquad (40')$$

因为 $\rho(h_r) = 0$. 我们将形式地认为这个表达式是当 $r = h_r$ 时算子 $L_r v$ 的逼近.

算子 $L_\theta v$ 也是变系数算子,当 $\theta \neq 0.5h_\theta$ 和 $\theta \neq \pi - 0.5h_\theta$ 时应用均衡法并利用第二章 §3 的公式 (9) 导出逼近于算子 L_θ 的算子 Λ_θ:

$$\Lambda_\theta v = \frac{1}{r^2 \sin\theta}(\sin\bar{\theta} v_{\bar{\theta}})_\theta \sim L_\theta v$$

$$= \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial v}{\partial\theta}\right), \qquad (41)$$

其中 $\bar{\theta} = \bar{\theta}_i = \theta_i - 0.5h_\theta = ih_\theta$.

考虑到当 $\theta = 0.5h_\theta (i = 0)$ 时 $\theta = 0$, 当 $\theta = \pi - 0.5h_\theta$ 时 $\bar{\theta}^{(+1)} = \theta - 0.5h_\theta + h_\theta = \pi$, 我们写出上述的 Λ_θ 表达式在 $\theta = 0.5h_\theta$ 及 $\theta = \pi - 0.5h_\theta$ 时的形式:

$$\Lambda_\theta v = \frac{\sin\bar{\theta}^{(+1)}}{h_\theta r^2 \sin\theta} v_\theta, \quad 当\ \theta = 0.5h_\theta \ (\bar{\theta}^{(+1)} = h_\theta),$$

$$\Lambda_\theta v = -\frac{\sin\bar{\theta}}{h_\theta r^2 \sin\theta} v_{\bar{\theta}}, 当\ \theta = \pi - 0.5h_\theta \ (\bar{\theta} = \pi - 0.5h_\theta).$$

我们用这些表达式作为算子 L_θ 在 $\theta = 0.5h_\theta$ 及 $\theta = \pi - 0.5h_\theta$ 时的差分逼近,即在网格 ω_θ (因而在 Ω) 的所有节点上利用公式 (41).

这样,我们得到了方程 (38) 在网格 Ω 上的差分逼近

$$\Lambda y = \Lambda_r y + \Lambda_\varphi y + \Lambda_\theta y = -f(r,\varphi,\theta),$$

$$(r,\varphi,\theta) \in \Omega, \qquad (42)$$

其中算子 Λ_r, Λ_φ, Λ_θ 由公式 (40),(40′), (39) 和(41)确定.

现在计算差分格式 (42) 的逼近误差:

$$\psi = \Lambda u + f = \Lambda_r u + \Lambda_\varphi u + \Lambda_\theta u + f(r,\varphi,\theta), \quad (43)$$

这里 u 是微分方程 (38) 的解. 我们把表达式 $\Lambda_r u$ 按 h_r 幂展

开，再把 $\Lambda_\varphi u$ 按 h_φ 幂展开，把 $\Lambda_\theta u$ 按 h_θ 幂展开.

注意到

$$u_r=\left(\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{h_r}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{h_r^2}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial r^3}\right)_{r=r_n}+\frac{h_r^3}{24}\overline{\frac{\partial^4 u}{\partial r^4}},$$
$$u_{\bar r}=\left(\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{h_r}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{h_r^2}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial r^3}\right)_{r=r_n}-\frac{h_r^3}{24}\overline{\overline{\frac{\partial^4 u}{\partial r^4}}}, \tag{44}$$

其中

$$\overline{\frac{\partial^4 u}{\partial r^4}}=\left.\frac{\partial^4 u}{\partial r^4}\right|_{r=\bar r_n},\quad \bar r_n\in[r_n,r_{n+1}],$$
$$\overline{\overline{\frac{\partial^4 u}{\partial r^4}}}=\left.\frac{\partial^4 u}{\partial r^4}\right|_{r=\bar{\bar r}_n}\quad \bar{\bar r}_n\in[r_{n-1},r_n],$$

且 $\rho=r(r-h_r)$，$\rho^{(+1_r)}=(r+h_r)r$，得到

$$\begin{aligned}\Lambda_r u&=\frac{1}{r^2}(\rho u_{\bar r})_r=\frac{1}{r^2h_r}(\rho^{(+1_r)}u_r-\rho u_{\bar r})\\&=L_r u+\frac{h_r^2}{3r}\frac{\partial^3 u}{\partial r^3}+\frac{h_r^2}{24}\left\{\left(1+\frac{h_r}{r}\right)\overline{\frac{\partial^4 u}{\partial r^4}}\right.\\&\quad\left.+\left(1-\frac{h_r}{r}\right)\overline{\overline{\frac{\partial^4 u}{\partial r^4}}}\right\}.\end{aligned} \tag{45}$$

对于 $\Lambda_\varphi u$ 显然有下述表示式

$$\Lambda_\varphi u=L_\varphi u+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{h_\varphi^2}{12}\widetilde{\frac{\partial^4 u}{\partial\varphi^4}}, \tag{46}$$

其中 $\widetilde{\dfrac{\partial^4 u}{\partial\varphi^4}}=\left.\dfrac{\partial^4 u}{\partial\varphi^4}\right|_{\varphi=\tilde\varphi_m}$，$\tilde\varphi_m\in[\varphi_{m-1},\varphi_{m+1}]$.

现在来讨论表达式

$$\begin{aligned}\Lambda_\theta u&=\frac{1}{r^2\sin\theta}(\sin\bar\theta u_{\bar\theta})_\theta\\&=\frac{1}{h_\theta r^2\sin\theta}[\sin\bar\theta^{(+1)}u_\theta-\sin\bar\theta u_{\bar\theta}].\end{aligned}$$

把根据 (44) 类型的公式求出的 u_θ 及 $u_{\bar\theta}$ 的表达式代入上式，经过简单的变换后得到

$$\begin{aligned}\Lambda_\theta u = L_\theta u + \Big\{ &-\frac{\cos\theta}{r^2\sin\theta}\left(1-\frac{2\sin(h_\theta/2)}{h_\theta}\right)\frac{\partial u}{\partial\theta} \\ &- \frac{2\sin^2(h_\theta/4)}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} + \frac{h_\theta^3}{3}\frac{\sin(h_\theta/2)}{h_\theta}\frac{\cos\theta}{r^2\sin\theta}\frac{\partial^3 u}{\partial\theta^3} \\ &+ \frac{h_\theta^2}{24r^2\sin\theta}\Big[\sin(\theta+0.5h_\theta)\overline{\frac{\partial^4 u}{\partial\theta^4}} \\ &+ \sin(\theta-0.5h_\theta)\overline{\overline{\frac{\partial^4 u}{\partial\theta^4}}}\Big]\Big\}. \qquad (47)\end{aligned}$$

把(45)—(47)代入(43)后我们得到逼近误差 Φ 按 h_r, h_φ 及 h_θ 的幂展开式．要估计 Φ 关于 h_r, h_φ 及 h_θ 的阶，必须估计在 Φ 的表达式中所包含的对 r, φ 及 θ 的偏导数．

我们假定方程 (1) (或(38)) 的解对笛卡儿变量 x_1, x_2 及 x_3 有 4 阶有界偏导数．由于

$$x_1 = r\sin\theta\cos\varphi,\quad x_2 = r\sin\theta\sin\varphi,\quad x_3 = r\cos\theta,$$

我们求得导数

$$\frac{\partial x_1}{\partial r} = \sin\theta\cos\varphi,\quad \frac{\partial x_2}{\partial r} = \sin\theta\sin\varphi,$$

$$\frac{\partial x_3}{\partial r} = \cos\theta,\quad \frac{\partial^k x_i}{\partial r^k} = 0,\quad k>1,\quad i=1,2,3.$$

导数 $\dfrac{\partial^k u}{\partial r^k}$ $(k=1,2,3,4)$ 可用 u 关于 x_1, x_2 及 x_3 的 $j(j\leqslant k)$ 阶导数的线性组合表示，而组合的系数只依赖于 $\dfrac{\partial x_i}{\partial r}$ $(i=1,2,3)$，因此是有界的：

$$\left|\frac{\partial^3 u}{\partial r^3}\right| \leqslant M,\quad \left|\frac{\partial^4 u}{\partial r^4}\right| \leqslant M',$$

其中 M, M' 是正常数．

其次有

$$\frac{\partial x_1}{\partial \varphi} = -r\sin\theta\sin\varphi = -x_2,$$

$$\frac{\partial x_2}{\partial \varphi} = r\sin\theta\cos\varphi = x_1,$$

$$\frac{\partial x_3}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial^2 x_1}{\partial \varphi^2} = -x_1,$$

$$\frac{\partial^3 x_1}{\partial \varphi^3} = x_2, \quad \frac{\partial^4 x_1}{\partial \varphi^4} = x_1,$$

$$\frac{\partial^2 x_2}{\partial \varphi^2} = -x_2, \quad \frac{\partial^3 x_2}{\partial \varphi^3} = -x_1,$$

$$\frac{\partial^4 x_2}{\partial \varphi^4} = x_2.$$

逐次计算导数

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi} = \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial \varphi},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = \sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\frac{\partial x_i}{\partial \varphi}\frac{\partial x_j}{\partial \varphi} + \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial^2 x_i}{\partial \varphi^2}$$

等等，我们看出

$$\frac{\partial^4 u}{\partial \varphi^4} = \sum_{j=1}^{4} P_j(x_1, x_2, u),$$

这里 $P_j(x_1,x_2,u)$ 是变量 x_1，x_2 的 $j(\geqslant 1)$ 次齐次多项式，而它的系数与 u 的关于 x_1 及 x_2 的 j 阶导数成比例. 因此导数 $\partial^4 u/\partial\varphi^4$ 与 $r\sin\theta$ 成比例，由于导数 $\partial^k u/\partial x_i^s \partial x_{i'}^{k-s}$，$s \leqslant k$，$i$，$i' = 1,2,3$，$k = 1,2,3,4$ 有界，于是有

$$\left|\frac{\partial^4 u}{\partial \varphi^4}\right| \leqslant M r \sin\theta, \quad M = \text{const} > 0.$$

现在来估计导数 $\dfrac{\partial^k u}{\partial \theta^k}$，$k = 1,2,3,4$：

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial \theta},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial x_i}{\partial \theta} \frac{\partial x_j}{\partial \theta} + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial^2 x_i}{\partial \theta^2}$$

等等，因为

$$\frac{\partial x_1}{\partial \theta} = r\cos\theta\cos\varphi, \quad \frac{\partial x_2}{\partial \theta} = r\cos\theta\sin\varphi,$$

$$\frac{\partial x_3}{\partial \theta} = -r\sin\theta, \quad \frac{\partial^2 x_1}{\partial \theta^2} = -r\sin\theta\cos\varphi = -x_1,$$

$$\frac{\partial^2 x_2}{\partial \theta^2} = -x_2, \quad \frac{\partial^2 x_3}{\partial \theta^2} = -x_3, \qquad \frac{\partial^3 x_1}{\partial \theta^3} = \frac{\partial x_1}{\partial \theta}$$

等等，所以有表示式

$$\frac{\partial^k u}{\partial \theta^k} = \sum_{j=1}^{k} P_j(r;\varphi,\theta;u), \quad k = 1,2,3,4,$$

其中 $P_j(r;\varphi,\theta;u)$ 是变量 r 的 j 次齐次多项式，而系数有界，并依赖于 φ，θ 及函数 u 关于 x_1，x_2，x_3 的 j 阶导数. 这样，对任意 $k \geqslant 1$，导数 $\partial^4 u/\partial\theta^4$ 与 r 成比例，且

$$\left|\frac{\partial^k u}{\partial \theta^k}\right| \leqslant Mr, \quad M = \text{const} > 0, \quad k = 1,2,3,4.$$

结果我们得到逼近误差 (43) 的下列估计：

$$\psi = O\left(\frac{h_r^2}{r} + \frac{h_\theta^2 + h_\varphi^2}{r\sin\theta}\right) \text{ 或 } |\psi| \leqslant M\left(\frac{h_r^2}{r} + \frac{h_\theta^2 + h_\varphi^2}{r\sin\theta}\right),$$

这里 $M = \text{const} > 0$.

§2. 在狄利克雷边界条件下泊松方程网格边值问题的提法

在 §1 中我们讨论了在笛卡儿坐标，极坐标，柱坐标及球面坐标系下的泊松方程最简单的差分逼近. 现在转而叙述相应的狄利克雷差分问题. 为此，应当在网格的边界节点建立边界条件，而在曲线边界情形下列出靠近边界节点的差分方

程. 这一节就是讨论差分边值问题的提法.

1. 矩形的狄利克雷差分问题. 设在平面 Ox_1x_2 上给出了一个有界区域 G, 边界为 Γ. 在 $\bar{G} = G \cup \Gamma$ 上考虑泊松方程的狄利克雷问题: 要求找出方程

$$\Delta u = -f(x), \quad x = (x_1, x_2) \in G, \tag{1}$$

在 $\bar{G}$ 上连续的解 $u(x)$, 且满足边界条件

$$u = g(x), \quad x = (x_1, x_2) \in \Gamma, \tag{2}$$

其中 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是给定的函数.

在用差分问题逼近问题 (1), (2) 之前, 需要在 G 中引进网格, 当在 $\bar{G}$ 中建立网格时必须注意到它的边界特性. 应当力求引进这样的网格, 在它上面逼近问题(1),(2)最方便. 例如若区域 G 是平行坐标轴的矩形

$$G = \{x = (x_1, x_2) \mid a_\alpha < x_\alpha < b_\alpha, \alpha = 1,2\},$$

那末矩形均匀网格的步长 h_1 和 h_2 应与矩形的边长 $(b_1 - a_1)$ 和 $(b_2 - a_2)$ 协调. 亦即较合适的是取

$$h_1 = (b_1 - a_1)/N_1, \quad h_2 = (b_2 - a_2)/N_2, \tag{3}$$

其中 $N_1 > 0, N_2 > 0$ 是整数. 因而作为区域 $\bar{G}$ 的网格可以取下述点的集合:

$$\bar{\omega} = \{x_i = (x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_2)}) \mid x_\alpha^{(i_\alpha)} = a_\alpha + i_\alpha h_\alpha, \\ 0 \leqslant i_\alpha \leqslant N_\alpha, \alpha = 1, 2\}. \tag{4}$$

集合

$$\omega = \{x_i \mid 0 < i_1 < N_1, \ 0 < i_2 < N_2\}$$

是网格 $\bar{\omega}$ 的内节点集合, 而

$$\gamma = \bar{\omega} \setminus \omega = \{x_i = (x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_2)}) \mid i_1 = 0, N_1, \\ 0 < i_2 < N_2 \text{ 及 } 0 < i_1 < N_1, \ i_2 = 0, N_2\}$$

是网格 $\bar{\omega}$ 的边界节点集合.

所建立的网格 $\bar{\omega}$ 具有这样的特色, 沿每 x_1, x_2 方向它是均匀的, 而它的边界 γ 位于矩形 G 的边界 Γ 上. 如果我们放弃

专门选定的步长(3)，则我们只好允许或者在G中出现网格非均匀性，或者网格的边界γ或它的一部份不属于矩形G的边界Γ. 第一种情形对逼近方程(1)不方便，第二种情形对逼近边界条件(2)不方便.

这样，我们在$\bar{G}$中建立了网格. 在这种网格上问题(1)，(2)可用下述方式逼近:

$$\Lambda y = -f(x), \qquad x = (x_1, x_2) \in \omega, \tag{5}$$

$$y = g(x), \qquad x = (x_1, x_2) \in \gamma, \tag{6}$$

其中Λ是五点网格算子:

$$\Lambda y = y_{\bar{x}_1 x_1} + y_{\bar{x}_2 x_2} = \frac{1}{h_1^2}(y^{(+1_1)} - 2y + y^{(-1_1)}) + \frac{1}{h_2^2}(y^{(+1_2)} - 2y + y^{(-1_2)}). \tag{7}$$

在网格$\bar{\omega}$上问题(1)，(2)也可用另外方式逼近，如

$$\Lambda' y = -\varphi(x), \quad x \in \omega, \tag{8}$$

$$y = g(x), \qquad x \in \gamma, \tag{9}$$

其中Λ'是由§1公式(6)所确定的九点算子，即

$$\Lambda' y = \Lambda y + \frac{h_1^2 + h_2^2}{12}\Lambda_1 \Lambda_2 y \tag{10}$$

或

$$\Lambda' y = y_{\bar{x}_1 x_1} + y_{\bar{x}_2 x_2} + \frac{h_1^2 + h_2^2}{12} y_{\bar{x}_1 x_1 \bar{x}_2 x_2},$$

这里 $\Lambda_\alpha y = y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}$, $\alpha = 1, 2$, 而$\varphi(x)$由§1公式(7)或(7')给出.

若矩形的边长$(b_1 - a_1)$和$(b_2 - a_2)$可约，则在区域G可以引进步长为h的正方形网格，这样它的边界γ仍然属于Γ. 在这种网格上问题(1)，(2)可用下述问题逼近:

$$\left.\begin{aligned} &\Lambda' y = \Lambda y + \frac{h^2}{6}\Lambda_1 \Lambda_2 y = -\varphi(x), && x \in \omega, \\ &y = g(x), && x \in \gamma, \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

这里 Λ' 由公式 (10) 当 $h_1 = h_2 = h$ 时确定，而 $\varphi(x)$ 由 §1 的表达式 (8) 确定.

2. 曲线边界区域. 如果区域 G 是圆，则选取矩形网格是不适宜的. 在这种情况下，采用极坐标，并在 G 中引进极坐标的网格，更为自然. 设 G 是中心在原点半径为 R 的圆

$$G = \{x = (x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 < R^2\}.$$

方程 (1) 在极坐标中的形式为

$$\Delta_{r\varphi}u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}$$

$$= L_r u + L_\varphi u = -f(r, \varphi). \qquad (12)$$

在上节为了逼近方程 (12)，曾经讨论了网格的合理选取. 把点 $r = 0$ 不包含在节点里，而最靠近这个点的网格节点位于 $0.5h_r$ 处，h_r 是沿 r 的步长，这样做比较方便. 为了易于逼近 $r = R$ 处的边界条件，我们在 $\bar{G}$ 中取如下的网格：

$$\bar{\omega} = \{(r_n, \varphi_m) \mid r_n = (n + 0.5)h_r, n = 0, 1, 2, \cdots, N,$$
$$h_r = R/(N + 0.5), \varphi_m = mh_\varphi, m = 0, 1, \cdots, M - 1,$$
$$h_\varphi = 2\pi/M\}.$$

网格内节点集合 ω 是

$$\omega = \{(r_n, \varphi_m) \in G,\ n = 0, 1, \cdots, N - 1,$$
$$m = 0, 1, 2, \cdots, M - 1\},$$

而边界节点属于集合 $\gamma = \bar{\omega} \setminus \omega$，它们的坐标是 (R, φ_m)，$m = 0, 1, 2, \cdots, M - 1$. 在这个网格上问题 (1), (2) 用下述问题来逼近：

$$\left.\begin{aligned} &\bar{\Lambda}y = \bar{\Lambda}_r y + \Lambda_\varphi y = -f(r, \varphi), && (r, \varphi) \in \omega, \\ &y(r, \varphi) = y(r, \varphi + 2\pi), && (r, \varphi) \in \omega, \\ &y = g(\varphi), && (r, \varphi) \in \gamma, \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

其中算子 $\bar{\Lambda}$ 由 §1 的公式 (29), (30) 确定.

我们再讨论两个特殊选取网格的例子.

设G是直角三角形，它的两直角边位于坐标轴上

$$G=\left\{x=(x_1,x_2)\,|\,0<x_1<a_1,\ 0<x_2<-\frac{a_2}{a_1}x_1+a_2\right\},$$

其中 $a_1>0$，$a_2>0$ 是直角边的长度；用Γ记三角形边界.

我们将每个直角边分成数目相同的N份，令

$$h_1=a_1/N,\quad h_2=a_2/N,$$

其中N是整数．区域G中的网格由直线 $x_1=i_1h$，$x_2=i_2h$，$i_1, i_2=0, 1, 2, \cdots$的交点组成．当这样选取h_1及h_2时，直线 $x_1=i_1h_1$ 和 $x_2=i_2h_2$ 与斜边相交于同样的一些点上，这些交点就是网格的边界节点．所得到的网格称为协调的．它沿每个方向都是均匀的．用 $\bar{\omega}$ 记区域 $\bar{G}=G\cup\Gamma$ 中所有网格节点的集合

$$\bar{\omega}=\{x_i=(i_1h_1,i_2h_2)\in\bar{G}\,|\,0\leqslant i_1\leqslant N,$$
$$i_2\leqslant N-i_1,\ i_1,i_2=0,1,\cdots,N\};$$

设 $\omega=\{x_i=(i_1h_1,\ i_2h_2)\in G\,|\,0<i_1<N,\ i_2<N-i_1\}$ 是内节点集合，而

$$\gamma=\bar{\omega}\setminus\omega=\{x_i=(i_1h_1,i_2h_2)\in\Gamma,i_1=0,$$
$$N,i_2=N-i_1\}$$

是边界节点集合.

在这个网格的所有内节点上可以写出五点格式

$$\Lambda y=y_{\bar{x}_1x_1}+y_{\bar{x}_2x_2}=-f(x),$$

其中Λ由公式 (7) 确定，而在边界上给出函数 $g(x)$，即当 $x\in\gamma$ 时 $y=g(x)$．这样我们导出形如 (5)，(6) 的问题.

设区域G是曲边三角形

$$G=\{x=(x_1,x_2)\,|\,x_\alpha>0,\alpha=1,2,x_2<F(x_1)\},$$

其中 $F(x_1)$ 是单调下降的连续函数且

$$-\infty<F'(x_1)<0.$$

显然，这个三角形的直线边长为 $a_1=F^{-1}(0)$，这里 $F^{-1}(x_2)$

是 $F(x_1)$ 的反函数，而 $a_2 = F(0)$. 若在G中试图沿每个坐标轴引进均匀网格，例如令 $h_1 = F^{-1}(0)/N = a_1/N_1$, $h_2 = F(0)/N_2 = a_2/N_2$，那末可能出现这种情形，直线 $x_1 = i_1h_1$ 交曲线 $x_2 = F(x_1)$ 于一些点，而直线 $x_2 = i_2h_2$ 与 $x_2 = F(x_1)$ 相交于完全不相同的另一些点．即可能出现图 8 所示的情形．

若G中的网格取为均匀的，那末它的边界 γ 不会完全属于原区域的边界 Γ，而这给边界条件的逼近带来困难．若就取上述直线与边界 Γ 的交点作为边界 γ，那末在边界 Γ 的曲线附近网格 ω 将是不均匀的．

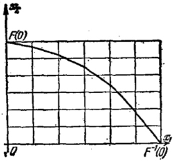


图 8

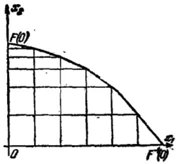


图 9

对于上面所说的这种类型的区域，引进所谓协调的非均匀网格有时是方便的．例如，给定沿 x_1 轴步长为 $h_1 = F^{-1}(0)/N$ 的均匀网格，沿 x_2 轴的网格取为

$$x_2^{(i_2)} = F(x_1^{(N-i_1)}), x_1^{(N-i_1)} = (N-i_1)h_1, i = 0,1,2,\cdots,N.$$

所建立的这种网格用图 9 画出．网格的所有边界节点都位于曲边三角形的边界上．网格是协调的．它沿 x_2 的步长由下列关系式给出

$$h_2^{(i_2)} = x_2^{(i_2)} - x_2^{(i_2-1)} = F(x_1^{(N-i_2)}) - F(x_1^{(N-i_2+1)})$$
$$= F'(x_1^{(N-i_2)} + \theta h_1)h_1 = O(h_1),\ 0 \leqslant \theta \leqslant 1,\ 即$$

$h_2 = O(h_1).$

在所得的网格上可以用格式(5),(6)逼近问题(1),(2),其中Λ是由§1的公式(22)确定的通常五点算子.

3. 任意形状的区域. 现在设区域G的边界Γ是非常一般形式的分段光滑曲线. 在这种情形下,很难作出关于选取特殊网格的一般性介绍,为了得到区域 $\bar{G} = G \cup \Gamma$ 中的网格 $\bar{\omega}(\bar{G})$,我们在平面 Ox_1x_2 上给出矩形均匀网格 Ω,它是由两族平行直线 $x_1 = i_1h_1$, $x_2 = i_2h_2$, $i_1, i_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$的交点组成;点 $x_i = (x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_2)}) = (i_1h_1, i_2h_2)$ 是网格的节点. 针对五点模式上方程(1)的逼近,我们将称节点 $x = (x_1, x_2)$ 和 $x' = (x_1', x_2')$ 是相邻的[1],若

$$\left|\frac{x_1 - x_1'}{h_1}\right| + \left|\frac{x_2 - x_2'}{h_2}\right| = 1, \text{ 或 } |i_1 - i_1'| + |i_2 - i_2'| = 1,$$

其中 $x_\alpha = i_\alpha h_\alpha$, $x_\alpha' = i_\alpha' h_\alpha$, $\alpha = 1,2$, 因此$|i_\alpha - i_\alpha'| = 1$或0. 用 $\omega = \{x = (i_1h_1, i_2h_2) \in G\}$ 表示落在区域G内部的所有节点 $x = (i_1h_1, i_2h_2)$ 的集合,这种节点称为网格 $\bar{\omega}(\bar{G})$的内节点. 我们称内节点 $x_i \in \omega$ 是正规的,若和它共同组成五点"十字"模式的所有四点邻点都属于$\bar{G}$. 正规节点的集合用 $\mathring{\omega}$ 表示. 若与x_i相邻的四个邻节点中只要有一个不属于 $\bar{G}$(即不属于G, 也不属于Γ),则称这种节点x_i为网格$\bar{\omega}$的非正规内节点. 所有非正规内节点的集合记为ω^*,因而$\mathring{\omega} \cup \omega^* = \omega$. 区域$G$的边界$\Gamma$与直线 $x_1 = i_1h_1$, $x_2 = i_2h_2$, $i_1, i_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$的交点称为边界节点,所有边界节点的集合用$\gamma$表示. 这样,在$\bar{G}$中建立了网格 $\bar{\omega} = \omega \cup \gamma$, 它是由内节点

1) 相邻节点的概念从根本上依赖于要逼近的方程的形式,更确切地说,依赖于将要在它上面逼近方程的模式形状. 这里所引进的相邻节点的定义与方程(1)在五点"十字"模式上的逼近相联系,这个模式由节点 (x_1, x_2), $(x_1 - h_1, x_2)$, $(x_1, x_2 - h_2)$, $(x_1 + h_1, x_2)$, $(x_1, x_2 + h_2)$ 所组成.

ω 和边界节点 γ 组成（图 10）.

现在我们提出在网格 $\bar{\omega}$ 上逼近方程（1），(2) 的差分问题．为此，需要在 $\bar{\omega}$ 上逼近方程 (1) 及边界条件 (2)．在正规内节点的集合 $\mathring{\omega}$ 上我们按五点"十字"模式用方程 (5) 逼近方程(1)，在边界节点 γ 上给出待求函数的值：

$$y = g(x), \quad 当\ x \in \gamma\ 时.$$

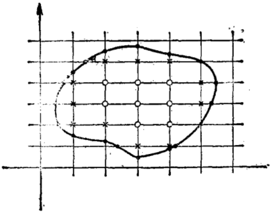


图 10

剩下的是写出非正规节点 $\overset{*}{\omega}$ 上的逼近．

这里可以有各种方案：

1. 直接转移或零次插值．在网格边值问题中，节点 $\overset{*}{\omega}$ 可看作边界，$\overset{*}{\omega}$ 上的条件由下式给出：

$$y(x) = g(\bar{x}), \quad x \in \overset{*}{\omega}, \tag{14}$$

这里 $\bar{x} \in \gamma$ 是最靠近 x 的边界节点．关系式 (14) 可解释为零次插值． 容易看到，未知解在节点 $\overset{*}{\omega}$ 上给出的误差是 $O(|h|)$.

2. 一次插值．节点集合 $\overset{*}{\omega}$ 仍看作是边界的，但网格问题的边值条件由沿一个轴 (x_1 或 x_2) 的一次插值给出．例如对图 11 所示的情形，未知解在节点 O 的值由沿 x_1 轴的节点 3 与 1 的线性插值确定，亦即

$$y_0 = \frac{h_1^- y_1 + h_1 y_3}{h_1^- + h_1} \tag{15}$$

(可以验证,关系式 (15) 的逼近误差是 $O(|h|^2)$).

注. 在某些讨论中,节点 $\mathring{o}$ 宜于看作内节点. 这时,将关系式 (15) 改写成

$$\Lambda_1 y_0 = \frac{1}{h_1}\left(\frac{y_1 - y_0}{h_1} - \frac{y_0 - y_3}{h_1^-}\right) = 0, \tag{16}$$

它应看作方程(1)的逼近. 显然,用关系式 (16) 逼近方程(1)的误差是 $O(1)$. 对节点 $\mathring{o}$ 作这样的解释时, 代替 (16) 自然可写出关系式

$$\frac{1}{h_1}\left(\frac{y_1 - y_0}{h_1} - \frac{y_0 - y_3}{h_1^-}\right) + \frac{y_2 - 2y_0 + y_4}{h_2^2} = -f_0, \tag{17}$$

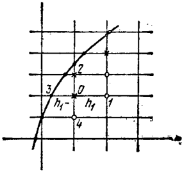


图 11

它的逼近误差仍然是 $O(1)$ (对照 (20)). 现在,直接转移和一次插值实际上是不采用的.

3. 在非均匀网格上逼近方程. 将节点 $\mathring{o}$ 看作内节点,而方程(1)按非均匀网格上的五点"十字"模式逼近. 图 11 所示的是非正规模式的一种可能类型. 节点 3 是边界节点, 节点 1, 2, 4 是内节点. 这时

$$\Lambda^* y_0 = \frac{1}{h_1}\left(\frac{y_1 - y_0}{h_1} - \frac{y_0 - y_3}{h_1^-}\right) + \frac{1}{h_2^2}(y_2 - 2y_0 + y_4)$$

$$= -f_0, \tag{18}$$

$$\hbar_1 = 0.5(h_1 + h_1^-).$$

在一般情形下，节点 $x^{(-1_1)}$（或 $x^{(+1_1)}$），$x^{(+1_2)}$（或 $x^{(-1_2)}$）可能成为边界点，这时泊松方程在五点非正规“十字”模式上按下式逼近：

$$\Lambda^* y = \Lambda_1^* y + \Lambda_2^* y \quad \text{当 } x \in \mathring{\omega}^* \text{ 时},$$

这里

$$\Lambda_\alpha^* y = y_{\bar{x}_\alpha \hat{x}_\alpha} = \begin{cases} \dfrac{1}{\hbar_\alpha}\left(\dfrac{y^{(+1_\alpha)} - y}{h_\alpha} - \dfrac{y - y^{(-1_\alpha)}}{h_\alpha^*}\right), \\ \qquad\qquad \text{若 } x^{(-1_\alpha)} \in \gamma \\ \dfrac{1}{\hbar_\alpha}\left(\dfrac{y^{(+1_\alpha)} - y}{h_\alpha^*} - \dfrac{y - y^{(-1_\alpha)}}{h_\alpha}\right), \\ \qquad\qquad \text{若 } x^{(+1_\alpha)} \in \gamma, \end{cases} \tag{19}$$

$\hbar_\alpha = 0.5(h_\alpha^* + h_\alpha)$，$h_\alpha^*$ 是 x 至边界节点 $x^{(-1_\alpha)} \in \gamma$ 或 $x^{(+1_\alpha)} \in \gamma$ 的距离．在非正规节点上的逼近误差 $\psi^* = \Lambda^* u - Lu$ 关于 $|h|$ 显然是一阶的，因为

$$\Lambda_\alpha^* u - L_\alpha u = O(\hbar_\alpha) = O(h_\alpha).$$

4．在非均匀网格的非正规节点上逼近方程的第二种方法（守恒格式）．把在正规节点 $x \in \mathring{\omega}$ 上与 $\Lambda y = y_{\bar{x}_1 x} + y_{\bar{x}_2 x_2}$ 相同而在非正规节点 $x \in \mathring{\omega}^*$ 上与 $\Lambda^* y = y_{\bar{x}_1 \hat{x}_1} + y_{\bar{x}_2 \hat{x}_2}$ 相同的差分算子，看作给定在 ω 上并在 γ 上等于零的网格函数空间中的算子，研究表明，在某些情形下这个算子失去微分算子 $Lu = \Delta u$ 所具有的一系列重要性质：自共轭性和符号确定性．这个事实与在非正规节点上逼近拉普拉斯算子的方法有关．改变这种逼近，我们就得到网格 ω 上狄利克雷差分问题的自共轭与符号确定的算子．为此只要令

$$\Lambda^* y = \Lambda_1^* y + \Lambda_2^* y, \quad \Lambda^* y = -f(x), \quad \text{当 } x \in \mathring{\omega}^* \text{时},$$

其中

$$\Lambda_\alpha^* y = \begin{cases} \dfrac{1}{h_\alpha}\left(\dfrac{y^{(+1_\alpha)} - y}{h_\alpha} - \dfrac{y - y^{(-1_\alpha)}}{h_\alpha^*}\right), & x^{(-1_\alpha)} \in \gamma, \\ \dfrac{1}{h_\alpha}\left(\dfrac{y^{(+1_\alpha)} - y}{h_\alpha^*} - \dfrac{y - y^{(-1_\alpha)}}{h_\alpha}\right), & x^{(+1_\alpha)} \in \gamma. \end{cases} \tag{20}$$

算子(19)与(20)之间形式上的差别在于将公式(19)中的因子 $1/\hbar_\alpha$ 换成在公式(20)中的因子 $1/h_\alpha$. 给定在 $\bar{\omega}$ 上并在边界 γ 上等于零的网格函数空间 H 的内积为

$$(y, v) = \sum_{x \in \omega} y(x) v(x) h_1 h_2.$$

上面所说的差分算子的自共轭性质意味着关于未知量 Y (网格函数 $y(x)$, $x \in \omega$) 的线代数方程组(差分方程)的矩阵是对称的. 这就使得有可能应用快速收敛的叠代法求出 $y = y(x)$, 这些方法是对具有对称系数矩阵的方程 $Ay = f$ 而发展起来的. 因此在非正规内节点 $x \in \overset{*}{\omega}$ 上逼近方程 $\Delta u = -f$ 的最后一种方法(20)应予以肯定.

于是,泊松方程的狄利克雷差分问题的提法如下:

$$\left.\begin{aligned} &\Lambda y = y_{\bar{x}_1 x_1} + y_{\bar{x}_2 x_2} = -f(x) && \text{在正规节点} \quad x \in \mathring{\omega}, \\ &\Lambda^* y = -f(x) && \text{在非正规节点} \quad x \in \overset{*}{\omega}, \\ &y = g(x) && \text{在边界节点} \quad x \in \gamma, \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

其中 Λ^* 由表达式(20)确定.

若 Λ^* 由公式(19)确定, 那末相应的问题记作问题(21′).

若 y 是问题(21)的解,而 u 是问题(1),(2)的解,那末其误差 $z(x) = y(x) - u(x)$ 满足条件

$$\left.\begin{aligned} &\Lambda z = -\psi(x) \ \text{当}\ x \in \mathring{\omega}, \quad \Lambda^* z = -\psi^*(x) \ \text{当}\ x \in \overset{*}{\omega}, \\ &z(x) = 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \text{当}\ x \in \gamma, \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

其中 $\psi(x) = \Lambda u + f$, $\psi^* = \Lambda^* u + f$.

若函数 $u = u(x)$ 在 $\bar{G}$ 上有直到四阶的有界导数, 亦即 $u \in C^4(\bar{G})$, 那末自共轭守恒格式(21)的逼近误差是 $\psi(x) =$

$O(|h|^2)$，$\psi^*(x)=O(1)$. 虽然在非正规内节点上逼近的阶下降(与格式(19)比较)，但在这一章§4将要证明，守恒格式(21)在一致度量下有二阶精度. 研究差分格式(21)的收敛性及精度阶的问题归结为通过问题(22)的右端ψ和ψ^*来估计其解z. 问题(22)解的估计式将在§4得出，它们是基于网格函数的最大值原理.

§3. 最大值原理

在这一节，我们研究某个网格方程类，对于这些网格方程成立所谓最大值原理. 不含混合偏导数的二阶椭圆型方程边值问题大多数主要的网格逼近均可纳入我们所考察的类型. 最大值原理可用于证明网格问题的可解性，而且在一系列情形还可用于得到网格问题解的先验估计.

1. 一般形式的网格方程. 设Ω是p维欧氏空间（网格）点（节点）$x=(x_1,x_2,\cdots,x_p)$的有限集合. 假定在每个点$x\in\Omega$给出了模式$Ш(x)\subset\Omega$，亦即Ω中点x的某个子集. 我们用$Ш'(x)=Ш(x)\backslash\{x\}$表示点$x$的邻域，即除去节点$x$本身之外，模式$Ш(x)$所有节点的集合. 考察方程

$$Sy(x)=F(x),\quad x\in\Omega,\tag{1}$$

其中$y(x)$是未知的，$F(x)$是已给的网格函数(方程的右端)，而S是线性算子. 它由下式确定

$$Sv(x)=A(x)v(x)-\sum_{\xi\in Ш'(x)}B(x,\xi)v(\xi),\tag{2}$$

系数$A(x)$及$B(x,\xi)$是已给的$x\in\Omega$和$\xi\in\Omega$的网格函数.

我们假定系数A和B满足条件

$A(x)>0$，$B(x,\xi)>0$，$\forall x\in\Omega$ 及 $\forall\xi\in Ш'(x)$，

$$D(x) \equiv A(x) - \sum_{\xi \in Ш'(x)} B(x, \xi) \geqslant 0. \tag{3}$$

设 x 是网格 Ω 的任一节点. 有两种可能的情形: a) 或者这个节点的邻域是空集, b) 或者 $Ш'(x)$ 至少包含一个节点 $\xi \in \Omega$.

若节点 $\bar{x}$ 的邻域 $Ш'(\bar{x})$ 是空集, 那末方程(1)当 $x = \bar{x}$ 时的形式为

$$A(\bar{x})y(\bar{x}) = F(\bar{x}) \text{ 或 } y(\bar{x}) = g(\bar{x})(g = F/A).$$

我们称这样的点 $\bar{x}$ 为边界节点, 其余的节点(它们的邻域至少包含一个点)称为内节点[1]. 用 γ 记所有边界节点的集合, 而用 ω 记网格 Ω 的所有内节点的集合, 于是 $\omega \cup \gamma = \Omega$.

当具有边界节点时, 问题 (1) 的提法是: 求方程

$$Sy(x) = F(x), \text{ 当 } x \in \omega, \tag{4}$$

满足边界条件

$$y(x) = g(x), \quad \text{当 } x \in \gamma \tag{5}$$

的解, 这里 $F(x), g(x)$ 是已给的函数, 这就是在网格 Ω 上的第一边值问题.

作为例子我们考察 §2 讲过的矩形上的问题 (5), (6). 我们容易将差分方程 $\Lambda y = y_{\bar{x}_1 x_1} + y_{\bar{x}_2 x_2} = -f(x)$ 改写成

$$2\left(\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2}\right)y(x) - \frac{1}{h_1^2}(y^{(-1_1)} + y^{(+1_1)})$$

$$- \frac{1}{h_2}(y^{(-1_2)} + y^{(+1_2)}) = f(x), x \in \omega,$$

$$y(x) = g(x), \quad x \in \gamma.$$

与 (4) 式比较就知道, 这里的 $A(x) = 2\left(\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2}\right) > 0$, $B(x,\xi) = 1/h_1^2$ 或 $1/h_2^2$, $F(x) = f(x)$, $D(x) \equiv 0$.

---

1) 显然, 这里引进的内节点和边界节点的概念与算子 S 的形式有关, 亦即它们依赖于模式 $Ш(x)$, $x \in \Omega$.

如果讨论的是椭圆型差分方程（泊松差分方程是其最简单的情形)的第二及第三边值问题，那末上面所定义的边界不出现，位于区域 G 边界 Γ 上的节点其区别仅在于这些点上的模式比网格内节点上的模式要小. 例如对泊松方程的第三边值问题，在节点 $x\in\Gamma$ 上有 $D(x)>0$，在其他节点上 $D(x)=0$.

现在我们引进连通网格的概念. 设 $\bar{x},\bar{\bar{x}}$ 是网格的两个任意节点，但不能同时是边界节点，为明确起见，假定 $\bar{x}$ 不属于边界 γ，即 $\bar{x}\in\omega$. 若对任意的 $\bar{x}\in\omega$，$\bar{\bar{x}}\in\Omega$ 可以指出节点序列 $x_1, x_2, \cdots, x_m$，使得每一个节点属于前一节点的邻域，即

$$x_1\in Ш'(\bar{x}), x_2\in Ш'(x_1), \cdots, x_m\in Ш'(x_{m-1}), \bar{\bar{x}}\in Ш'(x_m), \quad (6)$$

那末我们称网格 Ω 是连通的.

今后各处只讨论连通网格区域 Ω 及其子区域 Ω'.

注 1. 显然，连通网格 Ω 内节点的集合 ω 也是连通网格，并且成立关系式

$$\Omega=\bigcup_{x\in\omega} Ш(x).$$

对各个连通网格子区域 $\Omega'\subseteq\Omega$ 记

$$\bar{\Omega}'=\bigcup_{x\in\Omega'} Ш(x).$$

2. 最大值原理

定理 1 (最大值原理). 设 Ω 是网格区域，S 是给定在 Ω 上由 (2) 式确定的算子. 设 Ω 是连通区域，而 $\Omega'\subseteq\Omega$ 是 Ω 的连通子区域，在这个子区域上算子的系数满足条件 (3). 于是，若定义在 Ω 上的网格函数 $y(x)$ 在

$$\bar{\Omega}'=\bigcup_{x\in\Omega'} Ш(x)\subseteq\Omega$$

上不是常数并且当 $x\in\Omega'$ 时 $Sy(x)\leqslant 0\,(Sy(x)\geqslant 0)$，那末

$y(x)$ 在 Ω' 上不能取到正的最大(负的最小)值.

证明. 1.设

$$Sy(x) \leqslant 0. \tag{7}$$

假设存在节点 $\bar{x} \in \Omega'$, $y(x)$ 在这点取最大正值;

$$y(\bar{x}) = \max_{x \in \Omega'} \quad y(x) > 0 \tag{8}$$

于是在这个节点有

$$\begin{aligned} Sy(\bar{x}) &= A(\bar{x})y(\bar{x}) - \sum_{\xi \in Ш'(\bar{x})} B(\bar{x},\xi)y(\xi) \\ &= D(\bar{x})y(\bar{x}) + \sum_{\xi \in Ш'(\bar{x})} B(\bar{x},\xi)(y(\bar{x}) - y(\xi)). \end{aligned} \tag{9}$$

由于条件 (3), $D(\bar{x}) \geqslant 0$, 而根据假设 (8), $y(\bar{x}) > 0$. 因此 (9) 式右边第一项非负. 根据同一个假设 $y(\bar{x}) \geqslant y(\xi)$, 而由条件 (3) 之一有 $B(x, \xi) > 0$, 因此 (9) 式右边的后一项也是非负. 从而

$$Sy(\bar{x}) \geqslant 0.$$

在这个结论中有两种可能,或者

$$Sy(\bar{x}) > 0, \tag{10}$$

或者

$$Sy(\bar{x}) = 0. \tag{11}$$

结论 (10) 不能成立,因为它与定理的条件 (7) 相矛盾. 从而推知,或者假设 (8) 不正确从而定理得证,或者结论 (11) 成立. 现在讨论第二种可能性. 从关系式 (8), (9) 及条件 (3) 推得,当 $D(\bar{x}) > 0$ 时,结论 (11) 不可能成立,因而或者假设 (8) 不正确从而定理得证, 或者 $D(\bar{x}) = 0$. 设 $D(\bar{x}) = 0$. 于是由关系式 (8), (9) 得到

$$y(\xi) = y(\bar{x}), \quad \xi \in Ш'(\bar{x}). \tag{12}$$

因为根据条件当 $x \in \bar{\Omega}'$ 时, $y(x) \neq \text{const}$, 那末存在这样的节点 $\bar{\bar{x}} \in \bar{\Omega}'$, 使 $y(\bar{\bar{x}}) < y(\bar{x})$. 由于 $\bar{\Omega}'$ 的连通性, 可以找到

满足条件(6)的节点序列 $x_1,x_2,\cdots,x_m(x_i\in\Omega')$. 根据 (12) 有 $y(x_1)=y(\bar{x})$. 不失一般性,可以假定

$$y(x_1)=y(x_2)=\cdots=y(x_m)=y(\bar{x}),$$

因为若这个等式串只能延续到某个 $m_0, 1<m_0<m$, 那末可以取 x_{m_0+1} 作为 $\bar{x}$.

我们计算 $Sy(x_m)$.

$$\begin{aligned}Sy(x_m)&=D(x_m)y(x_m)+\sum_{\xi\in Ш'(x_m)}B(x_m,\xi)(y(x_m)-y(\xi))\\&\geqslant B(x_m,\bar{\bar{x}})(y(x_m)-y(\bar{\bar{x}}))\\&=B(x_m,\bar{\bar{x}})(y(\bar{x})-y(\bar{\bar{x}}))>0.\end{aligned}$$

这个结论与定理条件(7)相矛盾,因而假设 (8) 不正确. 定理的第一个结论得证.

2. 若 $Sy(x)\geqslant 0$, 那末只要将 $y(x)$ 换成 $(-y(x))$, 对此有 $S(-y(x))\leqslant 0$ 再利用上面的论证即可. 定理 1 证完.

3. 最大值原理的推论

推论 1. 若在 Ω 上 $Sy(x)\leqslant 0$ $(Sy(x)\geqslant 0)$ 且至少存在网格 Ω 的一个节点 x_0 使得

$$D(x_0)>0,\quad x_0\in\Omega,\tag{13}$$

那末在 Ω 上 $y(x)\leqslant 0$ $(y(x)\geqslant 0)$.

证明. 设 $Sy(x)\leqslant 0$, 若当 $x\in\Omega$ 时, $y(x)\equiv\text{const}$, 那末计算 $Sy(x)$ 在节点 $x=x_0$ 的值,得到

$$\begin{aligned}Sy(x_0)&=D(x_0)y(x_0)+\sum_{\xi\in Ш'(x_0)}B(x_0,\xi)(y(x_0)-y(\xi))\\&=D(x_0)y(x_0)\leqslant 0.\end{aligned}$$

从而根据(13)推得 $y(x)\equiv y(x_0)\leqslant 0$. 若当 $x\in\Omega$ 时 $y(x)\not\equiv\text{const}$, 那末由最大值原理 (当 $\Omega'=\Omega$) 知 $y(x)\leqslant 0$. 第二个结论可以类似地证明.

注 2. 若网格 Ω 包含边界节点 γ, 那末对于 $x\in\gamma$ 条件(13)自动满足.

推论 2. 设算子 S 在 Ω 上满足条件 (3), (13), 那末问题 (1), (2) 有唯一解.

在所作的假设下要证明问题(1),(2)解的存在与唯一性，只要证明齐次问题 $Sy(x)=0$ 在 Ω 上(在第一边值问题情况下,在 ω 上 $Sy(x)=0$, 在 γ 上 $y(x)=0$) 只有平凡解就够了. 应用推论 1 知,在 Ω 上或者 $y(x)\leqslant 0$, 或者 $y(x)\geqslant 0$, 因为等式 $Sy(x)=0$ 在两种情形下都是允许的. 这两个条件仅当 $y(x)\equiv 0$ (在 Ω 上) 才能相容.

4. 比较定理与先验估计. 应用最大值原理的推论 1 可以证明下面重要的定理成立.

定理 2 (比较定理). 设 $y(x)$ 是问题 (1)—(3), (13) 的解, 而 $\bar{y}(x)$ 是同一问题但右边为 $\bar{F}(x)$ 的解. 那末从条件 $|F(x)|\leqslant \bar{F}(x)$ (在 Ω 上)推知

$$|y(x)|\leqslant \bar{y}(x) \quad \text{在 } \Omega \text{ 上}.$$

证明. 由推论 1 在 Ω 上函数 $\bar{y}(x)\geqslant 0$. 将方程 $Sy=F$ 与 $S\bar{y}=\bar{F}$ 相加和相减得到

$$S(\bar{y}+y)=\bar{F}(x)+F(x)\geqslant 0,$$

$$S(\bar{y}-y)=\bar{F}(x)-F(x)\geqslant 0.$$

应用推论 1 知 $\bar{y}(x)+y(x)\geqslant 0$ 和 $\bar{y}(x)-y(x)\geqslant 0$, 即在 Ω 上 $-\bar{y}(x)\leqslant y(x)\leqslant \bar{y}(x)$ 或 $|y(x)|\leqslant \bar{y}(x)$. 这就是所要证明的.

注 3. 对于第一边值问题 (4), 比较定理意味着, 从条件

$$|F(x)|\leqslant \bar{F}(x) \text{ 在 } \omega \text{ 上}, \quad |g(x)|\leqslant \bar{g}(x) \text{ 在 } \gamma \text{ 上}$$

推得在 Ω 上 $|y(x)|\leqslant \bar{y}(x)$, 其中 $\bar{y}(x)$ 是问题: 在 ω 上 $S\bar{y}=\bar{F}$, 在 γ 上 $\bar{y}=\bar{g}$ 的解.

这样,问题 (1), (2) 的解可用强函数 $\bar{y}(x)$ 来估计, 这里的 $\bar{y}(x)$ 满足方程 $S\bar{y}=\bar{F}$ 且右端 $\bar{F}(x)\geqslant |F(x)|$, 例如, $\bar{F}(x)=|F(x)|$ 或 $\bar{F}(x)=\|F(x)\|_C$ 等等. 在下一节我们

将找出狄利克雷差分问题的强函数 $\bar{y}(x)$.

利用比较定理可以立即得到齐次方程第一边值问题(4),(5) 的解的估计.

推论 3. 对于问题

$$Sy=0 \quad 在\,\omega\,上, \quad y=g(x) \quad 在\,\gamma\,上$$

的解有下列先验估计式

$$\max_{\omega}|y(x)| \leqslant \max_{\gamma}|g(x)|. \tag{14}$$

证明. 设 $\bar{y}(x)$ 是问题在 ω 上 $S\bar{y}=0$, 在 γ 上 $\bar{y}=\bar{g}=|g(x)|$ 的解. 根据比较定理有 $|y(x)| \leqslant \bar{y}(x)$. 若在 γ 上 $\bar{g}(x)=\text{const}$, 而在 Ω 上 $\bar{y}=\text{const}$, 那末 $\max\bar{y}(x)=\max\bar{g}$, 从而不等式(14)成立. 若在 Ω 上 $\bar{y}(x) \not\equiv \text{const}$, 那末由最大值原理(当 $\Omega'=\omega$) 推知在 ω 上函数 $\bar{y}(x) \geqslant 0$ 不能达到最大值. 因此 $\bar{y}(x) \leqslant \max|g|$, 从而得出不等式 (14).

定理 3. 若在 Ω 上 $D(x)>0$, 那末问题 (1)—(3) 的解 $y(x)$ 有下列先验估计式

$$\max_{\Omega}|y(x)| \leqslant \max_{\Omega}\frac{|F(x)|}{D(x)}. \tag{15}$$

证明. 设 $\bar{y}(x)$ 是问题在 Ω 上 $S\bar{y}=|F(x)|$ 的解,从而 $|y(x)| \leqslant |\bar{y}(x)|$. 函数 $\bar{y}(x) \geqslant 0$ 在某一节点 $\bar{x}$ 达到最大值: $\bar{y}(\bar{x})=\max\limits_{\Omega}\bar{y}(x)>0$. 在这个节点上方程 (1) 可写成

$$D(\bar{x})y(\bar{x})+\sum_{\xi\in Ш'(\bar{x})}B(\bar{x},\xi)(\bar{y}(\bar{x})-\bar{y}(\xi))=|F(\bar{x})|.$$

因为 $\bar{y}(\bar{x}) \geqslant \bar{y}(\xi)$, 故 $D(\bar{x})\bar{y}(\bar{x}) \leqslant |F(\bar{x})|$,

$$\bar{y}(\bar{x}) \leqslant \frac{|F(\bar{x})|}{D(\bar{x})} \leqslant \max_{\Omega}\frac{|F(x)|}{D(x)}.$$

由此并由条件 $|y(x)| \leqslant \bar{y}(x)$ 推得定理的结论.

定理 4. 设网格 Ω 分为两个不交的非空子集 Ω' 和 Ω'', 并且 Ω' 是连通网格. 若在 Ω' 上 $F(x)=0$, 而在 Ω'' 上

$F(x) \neq 0$，$D(x) > 0$，那末问题 (1)—(3) 的解有估计式

$$\max_{x \in \Omega} |y(x)| \leqslant \max_{x \in \Omega''} \frac{|F(x)|}{D(x)}. \tag{16}$$

证明．我们引进强函数 $\bar{y}(x)$，它是同一方程 (1) 但右边为 $\bar{F}(x) = |F(x)| \geqslant 0$ ($S\bar{y} = 0$ 在 Ω' 上，$S\bar{y} = \bar{F}(x)$ 在 Ω'' 上) 的解．因为 $\Omega'' \neq \phi$ 及在 Ω'' 上 $D(x) > 0$，那末由推论 2 得知函数 $y(x)$ 与 $\bar{y}(x)$ 存在且唯一．又由推论 1 得知在 Ω 上 $\bar{y}(x) \geqslant 0$，再由比较定理推得在 Ω 上有 $y(x) \leqslant \bar{y}(x)$.

我们估计 $\bar{y}(x)$．从 $\bar{y}(x)$ 的方程知，或者在 $\bar{\Omega}'$ 上 $\bar{y}(x) = \text{const} > 0$ 或者 (由最大值原理) 在 Ω' 上 $\bar{y}(x)$ 不能达到最大值．在第二种情形有

$$\max_{\Omega'} \bar{y}(x) \leqslant \max_{\Omega''} \bar{y}(x). \tag{17}$$

因为 Ω' 与 Ω'' 是非空集合，且 Ω 与 Ω' 是连通网格，故 $\bar{\Omega}' \cap \Omega'' \neq \phi$，由此推出，在第一种情形不等式 (17) 也成立.

现在估计 (17) 式的右端． 设在节点 $x_0 \in \Omega''$ 上达到 $\max \bar{y}(x)$．于是在这一点有

$$\begin{aligned}\bar{F}(x_0) &= D(x_0)\,\bar{y}(x_0) + \sum_{\xi \in Ш'(x_0)} B(x_0, \xi)(\bar{y}(x_0) - \bar{y}(\xi)) \\ &\geqslant D(x_0)\bar{y}(x_0),\end{aligned}$$

因为 $\bar{y}(x_0) \geqslant \bar{y}(\xi)$．由此得出

$$\max_{\Omega} \bar{y}(x) = \bar{y}(x_0) \leqslant \bar{F}(x_0)/D(x_0),$$

$$\max_{\Omega} |y(x)| \leqslant \max_{\Omega''} (|F(x)|/D(x)),$$

这正是所要证明的.

§4. 泊松方程狄利克雷差分问题的先验估计与收敛速度估计

在这一节我们利用最大值原理得出在 §2 所讨论过的差

分格式解的先验估计及这些格式的收敛速度的估计.

1. 第一边值问题的先验估计. 我们考察一般形式的第一边值问题:

$$\left.\begin{aligned} Sy(x) &= F(x) \quad 当\ x\in\omega, \\ y(x) &= g(x) \quad 当\ x\in\gamma. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

这里

$$Sy(x) = A(x)y(x) - \sum_{\xi\in Ш'(x)} B(x,\xi)y(\xi), \tag{2}$$

及

$$\begin{aligned} &A(x) > 0, \quad B(x,\xi) > 0, \\ &\qquad D(x) = A(x) - \sum_{\xi\in Ш'(x)} B(x,\xi) \geqslant 0. \end{aligned} \tag{3}$$

定理 1. 设 $\omega = \overset{\circ}{\omega} \cup \overset{*}{\omega}$，这里 $\overset{\circ}{\omega}$ 是连通网格，且在 $\overset{\circ}{\omega}$ 上 $D(x) \geqslant 0$，在 $\overset{*}{\omega}$ 上 $D(x) > 0$. 那末问题 (1),(2) 的解存在且唯一，对于这个解有下列估计式:

$$\max_{\bar{\omega}} |y(x)| \leqslant \max_{\gamma} |g(x)| + \max_{\bar{\omega}} |U(x)| + \max_{\overset{*}{\omega}} \left|\frac{F(x)}{D(x)}\right|, \tag{4}$$

这里的 $U(x)$ 是强函数，它是下列问题的解:

$$\left.\begin{aligned} &SU(x) = \bar{F}(x),\ x\in\omega,\ U(x) \geqslant 0,\ x\in\gamma, \\ &\bar{F}(x) \geqslant |F(x)|\ 当\ x\in\overset{\circ}{\omega}\ 及\ \bar{F}(x) \geqslant 0\ 当\ x\in\overset{*}{\omega}. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

证明. 1° 由最大值原理推得齐次问题当 $x\in\omega$ 时 $Sy = 0$，当 $x\in\gamma$ 时 $y(x) = 0$ 只有平凡解 (见推论 2). 因此问题 (1),(2) 有唯一解.

2°我们将问题 (1) 的解表示成三项之和

$$y(x) = \overset{1}{y}(x) + \overset{2}{y}(x) + \overset{3}{y}(x),$$

其中 $\overset{i}{y}(x)$, $i = 1,2,3$ 由下列条件确定:

$$S\overset{1}{y} = 0,\ x\in\omega;\ \overset{1}{y}(x) = g(x),\ x\in\gamma,$$

$$S\overset{2}{y} = F(x),\ x\in\overset{\circ}{\omega};\ S\overset{2}{y} = 0,\ x\in\overset{*}{\omega}\ 和\ \overset{2}{y} = 0\ 当\ x\in\gamma,$$

$$\overset{3}{S y}=0,\ x\in\mathring{\omega};\ \overset{3}{S y}=F(x),\ x\in\overset{*}{\omega} \text{ 和 } \overset{3}{y}=0 \text{ 当 } x\in\gamma.$$

由 § 3 的推论 3 有

$$\max_{x\in\bar{\omega}}|\overset{1}{y}(x)|\leqslant\max_{x\in\gamma}|g(x)|. \tag{6}$$

我们利用由条件 (5) 确定的强函数 $U(x)$ 来估计 $\overset{2}{y}(x)$. 由§3 定理 2 有

$$|\overset{2}{y}(x)|\leqslant|U(x)| \quad \text{和} \quad \max_{x\in\bar{\omega}}|\overset{2}{y}(x)|\leqslant\max_{x\in\bar{\omega}}|U(x)|. \tag{7}$$

因为 $\mathring{\omega}$ 是连通区域且当 $x\in\overset{*}{\omega}$ 时 $D(x)>0$, 所以可以应用 § 3 的定理 4 来估计 $\overset{3}{y}(x)$,

$$\max_{x\in\omega}|\overset{3}{y}(x)|\leqslant\max_{x\in\overset{*}{\omega}}|F(x)/D(x)|. \tag{8}$$

3° 注意到不等式 $|y(x)|\leqslant|\overset{1}{y}(x)|+|\overset{2}{y}(x)|+|\overset{3}{y}(x)|$ 并利用估计式 (6), (7), (8) 就得到不等式 (4).

从 (4) 看出, 构造强函数是一个独立的问题, 我们将在第 3 段讨论构造泊松方程的强函数.

2. 将泊松方程的狄利克雷差分问题写成标准形式. 为了应用前面的定理, 需要将狄利克雷问题的差分方程写成(1)的形式.

在 § 2 中对一般形状区域的狄利克雷差分问题的提法是

$$\left.\begin{aligned} \Lambda y &= y_{\bar{x}_1x_1}+y_{\bar{x}_2x_2}=-f(x) && \text{当 } x\in\mathring{\omega},\\ \Lambda^*y &= \Lambda_1^*y+\Lambda_2^*y=-f(x) && \text{当 } x\in\overset{*}{\omega},\\ y &= g(x) && \text{当 } x\in\gamma, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

其中 Λ_α^*y 由 § 2 的公式 (20) 确定:

$$\Lambda_\alpha^*y=\begin{cases} \dfrac{1}{h_\alpha}\left(\dfrac{y^{(+1_\alpha)}-y}{h_\alpha}-\dfrac{y-y^{(-1_\alpha)}}{h_\alpha^*}\right), & x^{(-1_\alpha)}\in\gamma\\ \dfrac{1}{h_\alpha}\left(\dfrac{y^{(+1_\alpha)}-y}{h_\alpha^*}-\dfrac{y-y^{(-1_\alpha)}}{h_\alpha}\right), & x^{(+1_\alpha)}\in\gamma, \end{cases}$$

其中 h_α^* 是 $x\in\overset{*}{\omega}$ 到 $x^{(+1_\alpha)}$ 或 $x^{(-1_\alpha)}$ 的距离.

此外，还考察了别的格式:

$$\begin{aligned}
&\Lambda y = y_{x_1x_1} + y_{x_2x_2} = -f(x), \qquad x\in\overset{\circ}{\omega},\\
&\Lambda^* y = \Lambda_1^* y + \Lambda_2^* y = -f(x), \qquad x\in\overset{*}{\omega}, \qquad (10)\\
&y(x) = g(x), \qquad x\in\gamma,
\end{aligned}$$

$$\Lambda_\alpha^* y = \frac{1}{\hbar_\alpha}(y_{x_\alpha} - y_{\bar{x}_\alpha}) = y_{\bar{x}_\alpha\hat{x}_\alpha}, \qquad \hbar_\alpha = 0.5(h_\alpha + h_\alpha^*).$$

在正规节点 $x\in\overset{\circ}{\omega}$ 上方程 $\Lambda y=-f$ 写成这样(图 12):

$$2\left(\frac{1}{h_1^2}+\frac{1}{h_2^2}\right)y(x) = \frac{1}{h_1^2}(y^{(+1_1)}+y^{(-1_1)}) + \frac{1}{h_2^2}(y^{(+1_2)}+y^{(-1_2)}) + f(x),$$

$$x\in\overset{\circ}{\omega}. \qquad (11)$$

在非正规节点 $x\in\overset{*}{\omega}$ 上对于格式 (9) 我们有 (图 13): 若 $x^{(-1_1)}\in\gamma$ 和 $x^{(+1_2)}\in\gamma$，则

$$\left(\frac{h_1+h_1^*}{h_1^2h_1^*}+\frac{h_2+h_2^*}{h_2^2h_2^*}\right)y(x) = \frac{1}{h_1^2}y^{(+1_1)}+\frac{1}{h_2^2}y^{(-1_2)}+f(x) + \frac{1}{h_1h_1^*}g^{(-1_1)}+\frac{1}{h_2h_2^*}g^{(+1_2)}, \qquad (12)$$

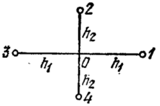


图 12

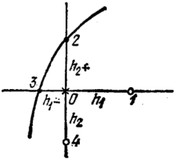


图 13

若 $x^{(-1_1)}\in\gamma$，而 $x^{(+1_2)}\notin\gamma$，那末代替 (12)，我们得到(图 14 a)

$$\left(\frac{h_1+h_1^*}{h_1^2h_1^*}+\frac{2}{h_2^2}\right)y(x)=\frac{1}{h_1^2}y^{(+1_1)}+\frac{1}{h_2^2}\left(y^{(+1_2)}+y^{(-1_2)}\right)$$
$$+f(x)+\frac{1}{h_2h_2^*}g^{(+1_2)}.$$

由此 $A(x)>0$，$B(x,\xi)>0$，而当 $x^{(-1_1)}\in\gamma$，$x^{(+1_2)}\in\gamma$ 时 $D(x)=\frac{1}{h_1h_1^*}+\frac{1}{h_2h_2^*}$，当 $x^{(-1_1)}\in\gamma$，$x^{(+1_2)}\notin\gamma$ 时 $D(x)=\frac{1}{h_1h_1^*}$.

对于其他情形，即当 $x^{(-1_1)}\in\gamma$，$x^{(+1_2)}\in\gamma$ (图 14б) 等等，可以得到 $D(x)$ 的类似表达式，对格式 (10) 的讨论也是一样的. 不难看出，在所有的情形下，对 $D(x)$ 成立以下估计式:

$$D(x)\geqslant 1/h^2,\ 其中\ h=\max(h_1,h_2),\ 当\ x\in\mathring{\omega}^*\ 时. \tag{13}$$

若 $x\in\omega$ 且所有节点 $\xi\in Ш'(x)$ 都是内节点，那末 $D(x)=0$. 若 $x\in\omega$ 是正规内节点，但至少它的一个邻点落在边界上，即 $x^{(\pm1_1)}\in\gamma$，或 $x^{(\pm1_2)}\in\gamma$，那末 $D(x)>0$. 这样一来有

$$D(x)\geqslant 0\quad 当\ x\in\mathring{\omega}. \tag{14}$$

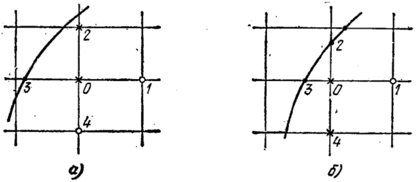


图 14

3. 问题的误差估计. 强函数. 设 $y=y(x)$ 是问题 (9) 或 (10) 的解，而 $u=u(x)$ 是 § 2 原问题 (1) 的解，解的误差记为 $z(x)=y-u$. 将 $y=z+u$ 代入 (9)，得到关于 z

的下述条件：

$$\Lambda z=-\phi(x),\ x\in\mathring{\omega},\ \Lambda^* z=-\phi^*(x),\ x\in\overset{*}{\omega},$$
$$z=0,\quad x\in\gamma. \tag{15}$$

这个问题可以写成

$$Sz=\phi,\ 当\ x\in\mathring{\omega},\ Sz=\phi^*,\ 当\ x\in\overset{*}{\omega},$$
$$z=0,\ 当\ x\in\gamma. \tag{15'}$$

现在我们构造下述问题的强函数 $U(x)$：

$$\left.\begin{array}{l}\overset{2}{S}z=\phi,\ 当\ x\in\mathring{\omega},\ \overset{2}{S}z=0,\ 当\ x\in\overset{*}{\omega},\\ \overset{2}{z}=0,\ 当\ x\in\gamma.\end{array}\right\} \tag{16}$$

设坐标原点 $(0,0)$ 位于区域 G 内部，而 R 是以原点为中心包含区域 G 的最小圆半径．令

$$U(x)=\frac{K}{4}(R^2-x_1^2-x_2^2). \tag{17}$$

这里的 K 是正常数，我们以后才来选定它．若 $x=(x_1,x_2)\in G$，那末 $U(x)\geqslant 0$．因为

$$(x_\alpha+h_\alpha)^2-x_\alpha^2=2(x_\alpha+0.5h_\alpha)h_\alpha,$$

故 $(x_1^2)_{\bar{x}_1x_1}=2$，$(x_1^2)_{\bar{x}_2x_2}=0$，因而 $(\Lambda_1+\Lambda_2)(x_1^2+x_2^2)=4$，即当 $x\in\mathring{\omega}$ 时 $\Lambda U=-K$．

在非正规节点 $x\in\overset{*}{\omega}$，对于格式 (9) 有

$$\Lambda^* U=-K\left(\frac{h_1+h_1^*}{4h_1}+\frac{h_2+h_2^*}{4h_2}\right)=-\kappa K,\ \kappa>\frac{1}{2}$$
$$当\ x^{(-1_1)},\ x^{(+1_2)}\in\gamma,$$

或 $x^{(+1_1)}$，$x^{(-1_2)}\in\gamma$ 等等．若只有 $x^{(-1_1)}\in\gamma$，那末

$$\Lambda^* U=-K\left(\frac{h_1+h_1^*}{4h_1}+\frac{1}{2}\right),$$
$$\kappa=\frac{h_1+h_1^*}{4h_1}+\frac{1}{2}>\frac{3}{4}.$$

这样，当 $x\in\overset{*}{\omega}$ 时 $\Lambda^* U=-\kappa K$，$\kappa>1/2$．将方程

$$SU = K,\ x \in \mathring{\omega};\ SU = \kappa K,\ \kappa > 1/2,\ x \in \overset{*}{\omega};$$
$$U(x) \geqslant 0,\quad x \in \gamma,$$

与方程 (16) 比较就看出,若令,例如 $K = \max\limits_{x \in \mathring{\omega}} |\psi(x)|$, 则

$$U(x) \geqslant |\overset{2}{z}(x)|.$$

这样，我们有

$$0 \leqslant U(x) \leqslant \frac{R^2}{4} K = \frac{R^2}{4} \max_{x \in \mathring{\omega}} |\psi(x)|.$$

注意到当 $x \in \mathring{\omega}$ 时 $D(x) \geqslant 0$, 当 $x \in \overset{*}{\omega}$ 时 $D(x) \geqslant \frac{1}{h^2}$,再应用定理 1,我们得到问题 (15) 解的估计式

$$\max_{\omega} |z(x)| = \max_{\omega} |y(x) - u(x)|$$
$$\leqslant \frac{R^2}{4} \max_{\mathring{\omega}} |\psi(x)| + h^2 \max_{\overset{*}{\omega}} |\psi^*(x)|. \quad (18)$$

从而推得下面的定理.

定理 2. 若 § 2 中问题 (1), (2) 的解 $u(x) \in C^4(\bar{G})$, 那末差分问题 (9) 与 (10) 的解一致收敛,速度为 $O(|h|^2)$:

$$\max_{\omega} |y(x) - u(x)| \leqslant M |h|^2,$$

这里 $M = \text{const} > 0$ 不依赖于 $h_1, h_2, |h|^2 = h_1^2 + h_2^2$.

4. 高精度格式. 我们考察 § 2 具有误差 $O(|h|^4)$ 的格式 (8),(9). 它定义在九点"箱形"模式上 (图 15 所示),且取下述形式

$$\Lambda' y = (\Lambda_1 + \Lambda_2) y + \frac{h_1^2 + h_2^2}{12} \Lambda_1 \Lambda_2 y = -\varphi(x),\quad x \in \omega,$$
$$y = g(x) \text{ 当 } x \in \gamma,$$
$$\varphi(x) = f + \frac{1}{12}(h_1^2 \Lambda_1 f + h_2^2 \Lambda_2 f), \qquad (19)$$

其中 ω 是矩形 $\{0 \leqslant x_\alpha \leqslant l_\alpha,\ \alpha = 1,2\}$ 上的网格, $\Lambda_\alpha y = y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}$, $\alpha = 1, 2$ (在这种情形下全部内节点均是正规的).

将方程 $\Lambda' y=-\varphi(x)$ 写成标准形式 $Sy=\varphi(x)$，其中 $Sy=-\Lambda' y$. 将 $\Lambda_1 y$ 和 $\Lambda_2 y$ 的表达式代入，我们得到（见图15）[1]

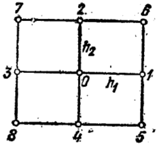


图 15

$$\frac{5}{3}\left(\frac{1}{h_1^2}+\frac{1}{h_2^2}\right)y(0)=\frac{1}{6}\left(\frac{5}{h_1^2}-\frac{1}{h_2^2}\right)(y(1)+y(3))$$
$$+\frac{1}{6}\left(\frac{5}{h_2^2}-\frac{1}{h_1^2}\right)(y(2)+y(4))$$
$$+\frac{1}{12}\left(\frac{1}{h_1^2}+\frac{1}{h_2^2}\right)(y(5)+y(6)$$
$$+y(7)+y(8)).$$

与(1)相比较看出

$$A(x)=\frac{5}{3}\left(\frac{1}{h_1^2}+\frac{1}{h_2^2}\right)>0;$$

$$B(x,\xi)=\frac{1}{6}\left(\frac{5}{h_1^2}-\frac{1}{h_2^2}\right)\geqslant 0,\quad \xi=1,3;$$

$$B(x,\xi)=\frac{1}{6}\left(\frac{5}{h_2^2}-\frac{1}{h_1^2}\right)\geqslant 0,\quad \xi=2,4;$$

$$B(x,\xi)=\frac{1}{12}\left(\frac{1}{h_1^2}+\frac{1}{h_2^2}\right)>0,\quad \xi=5,6,7,8;$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\leqslant\frac{h_2}{h_1}\leqslant\sqrt{5}. \tag{20}$$

---

1) 当 $h_1=\sqrt{5}h_2$ 和当 $h_2=\sqrt{5}h_1$ 时，模式只包含7个节点。

在条件 (20) 下，我们对格式 (19) 应用最大值原理：显然，当 $x\in\omega$ 时 $D(x)=0$，当 $x\in\gamma$ 时 $D(x)=A(x)=1$. 强函数 $U(x)$ 显然可以选为

$$U(x)=\frac{K}{4}(l_1^2+l_2^2-x_1^2-x_2^2),\ 0\leqslant x_\alpha\leqslant l_\alpha,\alpha=1,2.$$

因为 $\Lambda_1\Lambda_2U=0$，所以 $\Lambda'U=\Lambda U=-K$. 因此可以令

$$K=\max_{\omega}|\phi(x)|.$$

因为区域 G 是矩形而网格 $\bar{\omega}$ 关于 x_1 及 x_2 是均匀的，所以全部内节点均是正规的. 对于 $U(x)$ 下面的估计式成立

$$0\leqslant U(x)\leqslant\frac{l_1^2+l_2^2}{4}\max_{\omega}|\phi(x)|.$$

这样我们证明了，格式 (19) 的误差 $z(x)=y(x)-u(x)$ 满足估计式

$$\max_{\omega}|y(x)-u(x)|\leqslant\frac{l_1^2+l_2^2}{4}\max_{\omega}|\phi(x)|. \tag{21}$$

若原问题的解 $u(x)\in C^{(6)}(\bar{G})$，那末在条件 (20) 下格式 (19) 一致收敛，速度为 $O(|h|^4)$ (有 4 阶精度).

在正方形网格 $h_1=h_2=h$ 上条件 (20) 自动满足. 因此对 §1 的格式 (8)，(9) 可以应用估计式 (21). 这个格式与 (19) 的差别仅在于 $\varphi(x)$ 的表达式不同. 从 (21) 推知，若 $u(x)\in C^{(8)}(\bar{G})$，则这个格式一致收敛且速度为 $O(h^6)$ (有 6 阶精度).

5. 在极坐标和柱坐标下方程的格式. 现在我们回来讨论 §2 的问题 (13).

$$\left.\begin{aligned}&\bar{\Lambda}_r y+\Lambda_\varphi y=-f(r,\varphi),\quad (r,\varphi)\in\omega,\\&y(r,\varphi)=y(r,\varphi+2\pi),\ (r,\varphi)\in\omega,\\&\qquad\qquad y=g(\varphi),\quad (r,\varphi)\in\gamma,\\&\bar{\Lambda}_r y=\frac{1}{r}(\rho y_{\bar{r}})_r,\quad \rho=r-0.5h_r,\quad \Lambda_\varphi y=\frac{1}{r^2}y_{\bar{\varphi}\varphi}\end{aligned}\right\}\tag{22}$$

(边界γ由节点(R, φ_m)组成).

格式(22)逼近半径为R的圆 $0 \leqslant r \leqslant R$ 上泊松方程的狄利克雷问题:

$$\left.\begin{aligned} &\Delta_{r,\varphi} u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = -f(r,\varphi), \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad 0 < r < R,\ 0 \leqslant \varphi < 2\pi, \\ &r\frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=0} = 0,\ u = g(\varphi)\ \text{当}\ x = R, \\ &u(r,\varphi) = u(r,\varphi + 2\pi)\ \ (0 < r < R, 0 \leqslant \varphi < 2\pi). \end{aligned}\right\} \quad (23)$$

我们将方程(22)写成(1)的形式,显然, $x = (r_n, \varphi_m)$, 模型 $Ш(x) = \{(r_{n-1}, \varphi_m), (r_{n+1}, \varphi_m), (r_n, \varphi_{m-1}), (r_n, \varphi_{m+1}), (r_n, \varphi_m)\}$ 当 $r \neq 0.5h_r$ 与 $r \neq R$ 时, $Ш(x) = \{(r_1, \varphi_m), (r_0, \varphi_{m-1}), (r_0, \varphi_{m+1}), (r_0, \varphi_m)\}$ 当 $r = 0.5h_r$ 时.

从$\bar{\Lambda}_r$及Λ_φ的形式得出对于问题(22)条件(2)满足,并且在所有内节点 $x = (r_n, \varphi_m), n < N (r_n < R)$ 上 $D(x) = 0$. 网格仅由正规内节点组成. 若 $u \in C^{(4)}(\bar{G})$, 那末在每个节点上,对于格式(22)的逼近误差成立§1得到的估计式:

$$\psi = \bar{\Lambda}_r u + \Lambda_\varphi u + f(r,\varphi) = O\left(\frac{h_r^2 + h_\varphi^2}{r}\right). \quad (24)$$

为了估计当 $y|_\gamma = 0$ 时问题(22)的解,我们构造强函数

$$U(r,\varphi) = K(R - r), \quad K = \text{const} > 0.$$

把算子 $\Lambda = \bar{\Lambda}_r + \Lambda_\varphi$ 作用于U. 注意到U不依赖于φ和$\Lambda_\varphi U = 0$以及

$$\frac{1}{r}(\rho U_{\bar{r}})_r = -\frac{K}{rh_r}(r + 0.5h_r) - (r - 0.5h_r)$$

$$= -\frac{K}{r},$$

我们得到当 $x = (r,\varphi) \in \omega$ 时 $\Lambda U = -\frac{K}{r}$, $U(R,\varphi) = 0$.

我们要求对所有 $x=(r,\varphi)\in\omega$ 不等式 $K\geqslant r|f(r,\varphi)|$ 满足. 这只需令 $K=\max\limits_{\omega}|rf(r,\varphi)|$ 就可以了. 由此并由定理 1 推出

定理 3. 问题 (22) 的解存在且唯一, 对于它有估计式

$$\max_{\bar\omega}|y(x)|\leqslant\max_{\omega_\varphi}|g(\varphi)|+R\max_{\omega}|rf(r,\varphi)|. \tag{25}$$

若微分方程的解 $u(r,\varphi)$ 有关于 x_1 和 x_2 的四阶有界导数, 那末格式 (22) 一致收敛, 收敛阶为 2 (有 2 阶精度).

证明. 1) 定理 1 的条件满足. 因此可以应用估计式 (4), 并将

$$\max_{\omega}|U|\leqslant KR=R\max_{\omega}|rf(r,\varphi)|$$

代入其中.

2) 对误差 $z=y-u$ 我们得到

$$\bar\Lambda_r z+\Lambda_\varphi z=-\psi,\ (r,\varphi)\in\omega;\ z=0,\ 当\ r=R \tag{26}$$

及齐次边界条件. 由先验估计 (25) 有

$$\max_{\omega}|z(r,\varphi)|\leqslant R\max_{\omega}|r\psi(r,\varphi)|. \tag{27}$$

把估计式 (24) 或 $|r\psi|=O(h_r^2+h_\varphi^2)$ 代入上式得到

$$\max|z|\leqslant M(h_r^2+h_\varphi^2),$$

其中 $M=\text{const}>0$ 不依赖于 h_r 和 h_φ. 定理证完.

设在圆柱 (见 § 1 和 § 2)

$$\bar G=\{(x_1,x_2,x_3)\,|\,x_1^2+x_2^2\leqslant R^2,\ 0\leqslant x_3=z\leqslant l\}$$

中要求泊松方程的解, 在柱面上取给定的值. 在柱坐标中上述问题的提法是: 在 $\bar G$ 中求方程

$$\Delta_{r,\varphi,z}u=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-f(r,\varphi,z) \tag{28}$$

的有界解, 并且满足关于 φ 的周期性条件和边界条件 $u(r,\varphi,z)=g(r,\varphi,z)$ 当 $r=R$, $0\leqslant z\leqslant l$, $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$ 和当

$z=0,\ l, 0\leqslant r\leqslant R,\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$. 在柱体中引进已在 § 1 叙述过的网格

$$\bar{\omega}=\bar{\omega}_r\times\omega_\varphi\times\bar{\omega}_z=\{(r,\varphi,z)\,|\,r\in\bar{\omega}_r,\varphi\in\omega_\varphi,z\in\bar{\omega}_z\},$$
$$\bar{\omega}_r=\{r_n=(n+0.5)h_r,n=0,1,\cdots,N,$$
$$h_r=R/(N+0.5)\},$$
$$\bar{\omega}_\varphi=\{\varphi_m=mh_\varphi,m=0,1,\cdots,M-1,h_\varphi=2\pi/M\},$$
$$\bar{\omega}_z=\{z_k=kh_z,k=0,1,\cdots,I,h_z=l/I\}.$$

边界 γ 由节点 (R,φ_m,z_k), $(r_n,\varphi_m,0)$ 和 (r_n,φ_m,l) 组成，内节点的集合 $\omega=\bar{\omega}\backslash\gamma$. 所有的节点均是正规的，即 $\mathring{\omega}=\omega$. 在网格 $\bar{\omega}=\Omega$ 上问题 (28) 的差分格式为

$$\bar{\Lambda}y=\bar{\Lambda}_ry+\Lambda_\varphi y+\Lambda_z y=-f(r,\varphi,z),$$
$$x=(r,\varphi,z)\in\omega, \tag{29}$$
$$y=g(r,\varphi,z),\ x\in\gamma,$$

其中 $\Lambda_z y=y_{\bar{z}z}$, $\bar{\Lambda}_r+\Lambda_\varphi$ 是问题 (22) 的算子. 把 (29) 写成标准形式 (1) 就知道，条件 (2) 满足，且 $\bar{\omega}=\Omega$ 而当 $x\in\omega$ 时 $D(x)\equiv 0$. 为了应用定理 1，只要构造强函数 $U=U(r,\varphi,z)$.

不难看出，函数 $U=K(R-r)$ 也可以作为具有齐次边界条件的问题 (29) 的强函数. 因此定理 3 对于柱体中的狄利克雷差分问题 (29) 仍然有效. 此时，逼近误差

$$\psi=O\left(\frac{1}{r}(h_r^2+h_\varphi^2)+h_z^2\right),$$

而对误差 $z=y-u$ 有估计式

$$\max_\omega|y-u|\leqslant M(h_r^2+h_\varphi^2+h_z^2),$$

其中 $M=\text{const}>0$ 与网格步长无关. 这样格式 (29) 具有 2 阶精度.

6. 球面坐标下泊松方程的狄利克雷差分问题. 设在球

$$\bar{G}=\{(x_1,x_2,x_3)\,|\,x_1^2+x_2^2+x_3^2\leqslant R^2\}$$

中要求泊松方程的解，在球面上取给定的值．在球面坐标中问题的提法是：在$\bar{G}$中求方程

$$\Delta_{r,\varphi,\theta} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) = -f(r,\varphi,\theta)$$

$$\text{当 } 0<r<R,\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,\ 0\leqslant\theta\leqslant\pi \quad (30)$$

的连续解，并满足边界条件

$$u(r,\varphi,\theta) = g(\varphi,\theta) \quad \text{当 } r = R, \quad (30')$$

有界性条件

$$r^2\frac{\partial u}{\partial r} = 0 \text{ 当 } r = 0; \quad \sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta} = 0 \text{ 当 } \theta = 0,\pi, \quad (30'')$$

以及关于φ的周期性条件

$$u(r,\varphi,\theta) = u(r,\varphi+2\pi,\theta), \quad 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi. \quad (30''')$$

这个问题的差分格式已在§§ 1, 2 里得到．引进网格

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_r \times \omega_\varphi \times \omega_\theta = \{(r,\varphi,\theta) \mid r\in\bar{\omega}_r, \varphi\in\omega_\varphi, \theta\in\omega_\theta\},$$

这里的ω_φ用与上段一样的方法确定，而

$$\bar{\omega}_r = \{r_n = (n+1)h_r, n = 0,1,\cdots,N-1, h_r = R/N\},$$

$$\bar{\omega}_\theta = \{\theta_i = (i+0.5)h_\theta, i = 0,1,\cdots,I-1, h_\theta = \pi/I\}.$$

网格的边界γ由节点(R,φ_m,θ_i)组成

$$\gamma = \{(R,\varphi_m,\theta_i) \mid (\varphi_m,\theta_i)\in\omega_\varphi\times\omega_\theta\}.$$

内节点的集合为

$$\omega = \bar{\omega}\backslash\gamma = \{(r,\varphi,\theta) \mid r<R, (\varphi,\theta)\in\omega_\varphi\times\omega_\theta\}.$$

在网格 $\bar{\omega} = \Omega$ 上问题(30)的差分格式可写成

$$\left.\begin{aligned} &\Lambda y = \bar{\Lambda}_r y + \Lambda_\varphi y + \bar{\Lambda}_\theta y = -f(r,\varphi,\theta), \\ &\qquad\qquad x = (r,\varphi,\theta)\in\omega, \\ &y = g(\varphi,\theta) \text{ 当 } r = R, \\ &\qquad\qquad y(r,\varphi,\theta) = y(r,\varphi+2\pi,\theta), \end{aligned}\right\} \quad (31)$$

其中 $\bar{\Lambda} = \bar{\Lambda}_r + \Lambda_\varphi + \bar{\Lambda}_\theta$ 由 §1 的公式 (39)—(41) 确定．重新写出如下：

$$\bar{\Lambda}_r y = \frac{1}{r^2}(\rho y_{\bar{r}})_r, \quad \rho = r(r - h_r), \quad r = (n+1)h_r,$$

$$n = 0, 1, \cdots, N-1,$$

$$\Lambda_\varphi y = \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} y_{\bar{\varphi}\varphi}, \quad \bar{\Lambda}_\theta y = \frac{1}{r^2 \sin\theta}(\sin\bar{\theta} y_{\bar{\theta}})_\theta,$$

$$\bar{\theta}_i = \theta_i - \frac{1}{2}h_\theta = ih_\theta,$$

因此当 $n = 0$ 时 $\rho_n = 0$，当 $i = 0$ 时 $\bar{\theta}_i = 0$，当 $i = I$ 时，$\bar{\theta}_i = 2\pi$.

将格式(31)写成标准形式(1) ($\Omega = \bar{\omega}$) 可以看出，对于此格式条件(2)满足，且对所有 $x = (r, \varphi, \theta) \in \omega$ 有 $D(x) = 0$．我们作具有齐次边界条件 ($y = 0$ 当 $r = R$) 的问题 (31) 的强函数

$$U(r, \varphi, \theta) = K(R - r\sin\theta), \tag{32}$$

其中 $K = \text{const} > 0$.

计算 $(\bar{\Lambda}_r + \Lambda_\varphi + \bar{\Lambda}_\theta)U = \bar{\Lambda}_r U + \bar{\Lambda}_\theta U$.

注意到

$$\bar{\Lambda}_r r = \frac{1}{r^2}(\rho r_{\bar{r}})_r = \frac{1}{r^2 h_r}(\rho^{(+1_r)} - \rho)$$

$$= \frac{1}{r^2 h_r}(r(r + h_r) - r(r - h_r))$$

$$= \frac{2}{r},$$

$$(\sin\bar{\theta}(\sin\theta)_{\bar{\theta}})_{\theta, i} = \frac{1}{h_\theta^2}(\sin\theta_{i+0.5}(\sin\theta_{i+1} - \sin\theta_i)$$

$$- \sin\theta_{i-0.5}(\sin\theta_i - \sin\theta_{i-1}))$$

$$= \frac{1}{h_\theta^2}\sin\frac{h_\theta}{2}(\sin 2\theta_{i+0.5} - \sin 2\theta_{i-0.5})$$

$$= \frac{2}{h_\theta^2} \sin \frac{h_\theta}{2} \sin h_\theta \cos 2\theta_i,$$

我们得到

$$\bar{\Lambda} U = -\bar{F},\ x \in \omega;\ U = KR(1 - \sin\theta) \geqslant 0,\ x \in \gamma, \quad (33)$$

其中

$$\bar{F} = \frac{K}{r \sin\theta}(2\sin^2\theta + \kappa \cos 2\theta) > 0,$$

$$\kappa = \frac{\sin h_\theta}{h_\theta} \cdot \frac{\sin 0.5 h_\theta}{0.5 h_\theta}.$$

因为当 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ 时函数 $\varphi(\alpha) = \sin\alpha/\alpha$ 单调下降,所以对任意 $h_\theta \leqslant \frac{\pi}{2}$, 成立 κ 的双侧估计式 $4\sqrt{2}/\pi^2 \leqslant \kappa < 1$. 若 $\bar{F}(x) \geqslant |f(x)|$, 那末由§3的比较定理知函数 U 是具有齐次条件 ($y = 0$ 当 $x = (r,\varphi,\theta) \in \gamma$) 的问题 (31) 的强函数. 而不等式 $\bar{F}(x) \geqslant |f(x)|$ 当 $r \sin\theta \bar{F}(x) = K(2\sin^2\theta + \kappa(1 - 2\sin^2\theta)) \geqslant \kappa K > r \sin\theta |f(x)|$ 时是成立的.

为此只要令

$$\kappa K = \max_{\omega} |r \sin\theta f(r,\varphi,\theta)|.$$

从而得到对 K 的条件

$$K = \frac{1}{\kappa} \max_{\omega} |r \sin\theta f(r,\varphi,\theta)|$$

$$\leqslant \frac{\pi^2}{4\sqrt{2}} \max_{\omega} |r \sin\theta f(r,\varphi,\theta)|.$$

对 $U(x)$ 成立估计式

$$U(x) = U(r,\varphi,\theta) \leqslant KR < 2R \max_{\omega} |r \sin\theta f(r,\varphi,\theta)|.$$

对问题 (31) 应用定理 1, 我们得知:

1) 问题 (31) 有唯一解;对于这个解有先验估计式

$$\max_{\omega} |y(r,\varphi,\theta)| \leqslant \max_{\omega_\varphi \times \omega_\theta} |g(\varphi,\theta)|$$

$$+ 2R\max_{\omega}|r\sin\theta f(r,\varphi,\theta)|, \quad (34)$$

2）若问题(30)的解作为笛卡儿坐标变量 x_1, x_2, x_3 的函数在 $\bar{G}$ 中有四阶有界导数，则格式(31)有二阶精度，

$$\max_{\omega}|y(r,\varphi,\theta) - u(r,\varphi,\theta)| \leqslant M(h_r^2 + h_\varphi^2 + h_\theta^2),$$

其中 $M = \text{const} > 0$ 不依赖于 h_r, h_φ, h_θ.

第一个结论由定理1立即推得，为了估计精度我们考察误差问题

$$\bar{\Lambda}z = \bar{\Lambda}_r z + \Lambda_\varphi z + \bar{\Lambda}_\theta z = -\psi(r,\varphi,\theta),$$

$$x = (r,\varphi,\theta) \in \omega, \quad z = 0 \quad 当\ x \in \gamma.$$

逼近误差 ψ 已在§1里讨论过了；对于它有估计式

$$\psi(r,\varphi,\theta) = O\left(\frac{h_r^2}{r} + \frac{h_\varphi^2 + h_\theta^2}{r\sin\theta}\right). \quad (35)$$

利用估计式(34)，我们得到

$$\max_{\omega}|y - u| \leqslant 2R\max_{\omega}|r\sin\theta \cdot \psi(r,\varphi,\theta)|, \quad (36)$$

因而

$$\max_{\omega}|y(r,\varphi,\theta) - u(r,\varphi,\theta)| = O(h_r^2 + h_\varphi^2 + h_\theta^2).$$

第四章　数学物理基本边值问题的差分格式

本章建立数学物理基本方程最有代表性的边值问题的网格逼近．讨论二阶方程、拉梅方程组、双调和方程边值问题的提法．

§1．二阶方程的边值问题

本节我们将给出二阶微分方程基本边值问题的提法并指出某些类型的连接条件．

1．二阶方程．正如已经多次指出的，最简单的二阶椭圆型方程是拉普拉斯方程 $\Delta u=0$，在二维情况形如

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0. \tag{1}$$

在第一章§1中曾经指出，拉普拉斯方程用来描述不含内部热源的各向同性介质中的定常温度分布规律，稳定扩散现象以及许多其它物理过程．

如果介质含有内热源，则所述过程可用泊松方程描述：

$$\Delta u=-f(x),\quad x=(x_1,x_2,x_3),$$

这里函数 $f(x)$ 是热源分布密度．

如果热源分布密度不依赖于变量 x_3，则正如第一章§1指出的，在某些情况下，未知解也不依赖于 x_3，这时泊松方程可以表示成

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x_1}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}=-f(x),\quad x=(x_1,x_2). \tag{2}$$

今后我们总是假设未知解只依赖于两个变量 x_1 和 x_2，而

与 x_3 无关，即 $u = u(x_1, x_2)$. 这意味着，所述过程是在一个柱面围成的物体内进行的，这个柱面的母线平行于 ox_3 轴. 这时我们可以认为，问题是在 $x_3 = \text{const}$ 的平面与上述柱体相截而成的区域中进行讨论的.

为了描述在非均匀介质中进行的过程，需要与(2)不同的方程. 例如，在热传导系数 k 随点而变，即 $k = k(x)$ 的介质中的温度分布可用方程

$$Lu = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(k(x)\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(k(x)\frac{\partial u}{\partial x_2}\right) = -f(x),$$
$$x = (x_1, x_2) \tag{3}$$

描述. 如果在这一过程中热传导与方向有关，即介质各向异性，则适当选择自变量时，方程成为

$$Lu = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(k_1(x)\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(k_2(x)\frac{\partial u}{\partial x_2}\right) = -f(x), \tag{4}$$

这里 $k_1(x)$ 是沿 ox_1 轴的热传导系数，而 $k_2(x)$ 是沿 ox_2 轴的热传导系数.

热源密度可以是点 x 的已知函数，还可以依赖于未知解 $u(x)$. 如果热源密度线性依赖于温度，则(4)的右端应当附加上量 $q(x)u$. 如果热源密度还依赖于热流量，则(4)的右端取如下形式:

$$-\left(b_1(x)k_1(x)\frac{\partial u}{\partial x_1} + b_2(x)k_2(x)\frac{\partial u}{\partial x_2} - q(x)u + f(x)\right).$$

把此表达式代入(4)，得出以下方程:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(k_1(x)\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(k_2(x)\frac{\partial u}{\partial x_2}\right) + r_1(x)\frac{\partial u}{\partial x_1} + r_2(x)\frac{\partial u}{\partial x_2} - q(x)u + f(x) = 0, \tag{5}$$

这里 $r_1 = b_1k_1$，$r_2 = b_2k_2$.

方程(1)—(4)可以看成方程(5)的特殊情形.

有时为求解方便，需要作自变量代换，使得求解的新变量区域尽可能简单．这个代换可能使方程(5)出现混合导数．对新变量(我们仍用原记号表示它们)方程(5)变成以下形式:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(k_{11}(x)\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)+\frac{\partial}{\partial x_1}\left(k_{12}(x)\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(k_{21}(x)\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)$$
$$+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(k_{22}(x)\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)+r_1(x)\frac{\partial u}{\partial x_1}$$
$$+r_2(x)\frac{\partial u}{\partial x_2}-q(x)u+f(x)=0. \tag{6}$$

因为方程(6)是椭圆型的，则其系数 $k_{\alpha\beta}(x)$ 应当构成确定符号的二次型，即

$$|k_{11}(x)\xi_1^2+(k_{12}(x)+k_{21}(x))\xi_1\xi_2+k_{22}(x)\xi_2^2|\neq 0,$$
$$\text{当 } \xi_1^2+\xi_2^2\neq 0.$$

使它成立的条件是

$$4k_{11}(x)k_{22}(x)>(k_{12}(x)+k_{21}(x))^2. \tag{7}$$

关系式(6)是平面上最一般的二阶线性椭圆型方程.

2. 二阶方程的连接条件. 我们考察在两个相接触的各向同性物体中的定常热分布问题．描述每一个物体内部温度分布的方程具有(3)的形状．设 $k_1(x)$ 和 $u_1(x)$ 是第一个物体的热传导系数和温度，而 $k_2(x)$ 和 $u_2(x)$ 是第二个物体的热传导系数和温度．设第一个物体与第二个物体沿着柱面 S 发生接触，S 的准线 C 由方程 $\varphi(x_1, x_2)=0$ 给出，在这条曲线上热传导系数的值 $k_1(x)$ 和 $k_2(x)$ 不相等．假定物体间的接触是理想的，即两个物体在接触面上温度和热流是相同的．这意味着，在曲线 $\varphi(x_1, x_2)=0$ 上应当满足条件

$$u_2(x) - u_1(x) = 0,\quad k_2\frac{\partial u_2}{\partial n}(x) - k_1\frac{\partial u_1}{\partial n}(x) = 0,\ x \in C,$$

这里 n 是 C 的法线. 这些条件称为连接条件.

如果接触面是由方程 $x_1 = \mathring{x}_1$ 给定的平面，则连接条件具有如下形状:

$$\begin{aligned} &u_2(\mathring{x}_1, x_2) - u_1(\mathring{x}_1, x_2) = 0, \\ &k_2\frac{\partial u_2}{\partial x_1}(\mathring{x}_1, x_2) - k_1\frac{\partial u_1}{\partial x_1}(\mathring{x}_1, x_2) = 0. \end{aligned} \tag{8}$$

今后，两个物体中的温度值将用一个字母 u 表示，热传导系数用一个字母 k 表示. 于是，两个物体合起来可以看成是一个物体，但有间断的热传导系数. 连接条件(8)适宜于改写成

$$\begin{aligned} &u(\mathring{x}_1 + 0,\ x_2) - u(\mathring{x}_1 - 0,\ x_2) = [u]_{x=\mathring{x}} = 0, \\ &k\frac{\partial u}{\partial x_1}(\mathring{x}_1 + 0,\ x_2) - k\frac{\partial u}{\partial x_1}(\mathring{x}_1 - 0;\ x_2) \\ &\qquad = \left[k\frac{\partial u}{\partial x_1}\right]_{x=\mathring{x}} = 0, \end{aligned} \tag{9}$$

这里 $\mathring{x} = (\mathring{x}_1, x_2)$.

连接条件(9)并不是物体接触面上唯一可能的条件. 我们来考察另一种接触模型. 设热传导系数为 $k(x)$ 的两个平

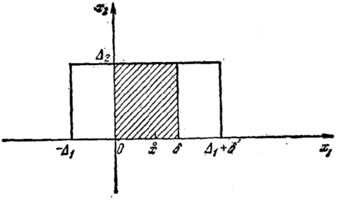


图 16

整的各向同性物体间有一个很薄的传导性弱的夹层. 物体和夹层间的接触认为是理想的. 为简单起见，设接触面是平面且其方程为 $x_1 = 0$ 和 $x_1 = \delta$. 设想从物体中割出一个棱柱体，其横断面（图 16）为

$$\Pi = \{-\Delta_1 < x_1 < \delta + \Delta_1,\ 0 < x_2 < \Delta_2\}.$$

根据(3)和(9)我们有

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(k\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(k\frac{\partial u}{\partial x_2}\right) = -f,\ -\Delta_1 < x_1 < 0,$$

$$\delta < x_1 < \delta + \Delta_1,\ 0 < x_2 < \Delta_2, \qquad (10)$$

$$\varepsilon\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right) = -f,\ 0 < x_1 < \delta,\ 0 < x_2 < \Delta_2,$$

$$[u]_{x_1=0} = 0,\ \varepsilon\frac{\partial u}{\partial x_1}\bigg|_{x_1=+0} - k\frac{\partial u}{\partial x_1}\bigg|_{x_1=-0} = 0, \qquad (11)$$

$$[u]_{x_1=\delta} = 0,\ k\frac{\partial u}{\partial x_1}\bigg|_{x_1=\delta+0} - \varepsilon\frac{\partial u}{\partial x_1}\bigg|_{x_1=\delta-0} = 0,$$

这里 $\varepsilon = \text{const}$ 是夹层的热传导系数. 在区域 $-\Delta_1 < x_1 < 0$, $0 < x_2 < \Delta_2$ 中对第一个方程积分，$0 < x_1 < \mathring{x}_1, 0 < x_2 < \Delta_2$ 中对第二个在区域积分，这里 $\mathring{x}_1 \in (0, \delta)$，再把所得关系式相加. 利用条件(11)，最后得到

$$\int_0^{\Delta_2}\left[\varepsilon\frac{\partial u}{\partial x_1}(\mathring{x}_1, x_2) - k\frac{\partial u}{\partial x_1}(-\Delta_1, x_2)\right]dx_2$$

$$+ \int_0^{\Delta_2} dx_2\left[\int_{-\Delta_1}^0 \frac{\partial}{\partial x_2}\left(k\frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, x_2)\right)dx_1\right.$$

$$\left. + \int_0^{\mathring{x}_1}\varepsilon\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}(x_1, x_2)dx_1 + \int_{-\Delta_1}^{\mathring{x}_1} f(x_1, x_2)dx_1\right] = 0$$

将此等式除以 Δ_2 并令 Δ_1 和 Δ_2 趋于零，

$$\varepsilon\frac{\partial u}{\partial x_1}(\mathring{x}_1, 0) - k(0, 0)\frac{\partial u}{\partial x_1}(0, 0)$$

$$+\int_0^{x_1}(\delta-x_1)\left[\varepsilon\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}(x_1,0)+f(x_1,0)\right]dx_1=0.$$

把所得到的关系式对 x_1 从 0 到 δ 积分，

$$\varepsilon[u(\delta,0)-u(0,0)]-\delta k(0,0)\frac{\partial u}{\partial x_1}(0,0)$$

$$+\int_0^{\delta}(\delta-x_1)\left[\varepsilon\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}(x_1,0)+f(x_1,0)\right]dx_1=0,$$

然后除以 δ 并令 ε 和 δ 在满足 $\varepsilon/\delta=\kappa=\text{const}$ 的条件下同时趋于零. 结果得到

$$\kappa[u]|_{x_1=0}=k\frac{\partial u}{\partial x_1}\bigg|_{x_1=-0}. \tag{12}$$

类似地得到第二个连接条件

$$\kappa[u]|_{x_1=0}=k\frac{\partial u}{\partial x_1}\bigg|_{x_1=+0}. \tag{13}$$

特别地，由(12)和(13)得知，接触线上的热流量是连续的，

$$k\frac{\partial u}{\partial x_1}\bigg|_{x_1=+0}=k\frac{\partial u}{\partial x_1}\bigg|_{x_1=-0},$$

而一般说来,温度是间断的.

连接条件(12),(13)可以解释为非理想接触的条件. 相互接触的物体在接触面上有不同的温度，其跃度与热流量成比例.

方程(3)还可有其它形式的连接条件,我们只提出下面这一种:

$$[u]=0,\quad\left[k\frac{\partial u}{\partial n}\right]=-\alpha(x),\quad x\in C. \tag{14}$$

由此条件可知，接触面上温度连续，而热流量经受已知的跳跃. 这表明曲面 S 上分布有密度为 $\alpha(x)$ 的集中热源.

3. 二阶方程的基本边值问题. 我们继续讨论二阶方程的边界条件. 最简单的边界条件是第一类边界条件，即条件

$$u(x) = g(x), \qquad x \in \Gamma, \tag{15}$$

其中 Γ 是区域 G 的边界，在 G 上给定了，譬如说，方程(6). 如果讲的是热传导问题，则条件(15)给出物体表面的温度.

如果在边界上给出(热)流量，则我们有第二边值问题. 如果物体是各向同性的，即过程由 (3) 描述，则根据第一章 § 1，第二边界条件为

$$k\frac{\partial u}{\partial n} = -g(x), \qquad x \in \Gamma, \tag{16}$$

这里 n 是边界 Γ 的内法线.

在边界 Γ 上常常给出第三类边界条件，其形式为

$$k\frac{\partial u}{\partial n} = \kappa(u - u_0) = \kappa u - g(x), \qquad x \in \Gamma, \tag{17}$$

这里 $k(x)$ 和 $u_0(x)$ 是给定的函数，而 $g(x) = \kappa(x)u_0(x)$. 条件 (17) 表示物体和周围的介质按照牛顿定律进行热交换，这里 $\kappa(x)$ 是热交换系数，而 $u_0(x)$ 是周围介质的温度. 第二类边界条件(16)是第三类边界条件 (17) 当 $\kappa = 0$ 时的特殊情况.

对方程(6)，类似于(17)的条件如下:

$$\frac{\partial u}{\partial N} = \sum_{\alpha,\beta=1}^{2} k_{\alpha\beta}\frac{\partial u}{\partial x_\beta}\cos(n, x_\alpha) = \kappa u - g(x), \qquad x \in \Gamma, \tag{18}$$

这里 n 是边界 Γ 的内法线，而 $\frac{\partial u}{\partial N}$ 是所谓沿副法线 (конормаль)的导数. 当 $k_{12}=k_{21}=0$ 且 $k_{11}=k_{22}=k$ 时，条件(18)变成条件(17).

对于方程(6)或它的任一特殊情况，可以提出带斜导数的问题，即寻找方程(6)的解，它在边界上满足边界条件

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \kappa u - g(x), \qquad x \in \Gamma, \tag{19}$$

这里 $l = l(x)$ 是某个给定的方向场，一般说来，这里 $\frac{\partial u}{\partial l}$ 与 $\frac{\partial u}{\partial N}$ 不相同.

除了经典的第一、第二和第三类边界条件以外，在边界 Γ 上也可以给出其他条件. 我们现在来导出这样的边界条件，它描述物体和周围介质之间按照牛顿定律进行热交换，而在物体表面上有一层很薄的传导性良好的薄膜. 为简单起见，假设物体是各向同性的，且它的表面是平面. 设薄膜附着在导热物体的左侧界面上，薄膜的左界面由方程 $x_1 = -\delta$ 给出，而薄膜的右界面，亦即物体的左界面由方程 $x_1 = 0$ 给出. 我们在界面附近割出一个棱柱体，其横截面是矩形

$$-\delta < x_1 < \Delta_1, \quad 0 < x_2 < \Delta_2.$$

假设薄膜和物体之间是理想接触. 于是根据(3)，(9)和(17)有

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right) = -f(x), \quad -\delta < x_1 < 0, \\ &\qquad\qquad 0 < x_2 < \Delta_2, \\ &\frac{\partial}{\partial x_1}\left(k\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(k\frac{\partial u}{\partial x_2}\right) = -f(x), \\ &\qquad\qquad 0 < x_1 < \Delta_1, \ 0 < x_2 < \Delta_2, \end{aligned} \tag{20}$$

$$[u]|_{x_1=0} = 0, \quad k\frac{\partial u}{\partial x_1}\bigg|_{x_1=+0} - \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial x_1}\bigg|_{x_1=-0} = 0, \tag{21}$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial x_1} = \kappa u - g(x), \qquad x_1 = -\delta, \tag{22}$$

这里 $\frac{1}{\varepsilon}$ 是薄膜的热传导系数.

把方程(20)中的每一个在各自的定义区域中积分，把得到的关系式相加并利用连接条件(21)和边界条件(22). 结果得出

$$\int_0^{\Delta_2}\left[k\frac{\partial u}{\partial x_1}(\Delta_1, x_2)-\kappa(x_2)u(-\delta, x_2)+g(x_2)\right]dx_2$$

$$+\int_0^{\Delta_2}\left[\int_{-\delta}^{0}\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}(x_1, x_2)dx_1\right.$$

$$+\int_0^{\Delta_1}\frac{\partial}{\partial x_2}\left(k\frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, x_2)\right)dx_1$$

$$\left.+\int_{-\delta}^{\Delta_1}f(x_1, x_2)dx_1\right]dx_2=0.$$

把此关系式除以 Δ_2 并对 Δ_1 和 Δ_2 趋于零求极限:

$$k\frac{\partial u}{\partial x_1}(0, 0)-\kappa(0)u(-\delta, 0)+g(0)$$

$$+\int_{-\delta}^{0}\left[\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}(x_1, 0)+f(x_1, 0)\right]dx_1=0.$$

现在令 ε 和 δ 在满足 $\delta/\varepsilon=\sigma=\text{const}$ 的条件下趋于零. 结果得到所求的边界条件

$$k\frac{\partial u}{\partial x_1}+\sigma\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}=\kappa u-g,\ x_1=0. \tag{23}$$

如果与角点相连的物体二侧面有不同厚度的薄膜，我们来说明在角点处需要提什么样的边界条件. 设该角是直角，

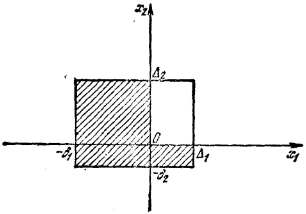


图 17

其顶点位于坐标原点，两边平行于坐标轴，而物体位于第一象限. 在角点附近割出矩形 $-\delta_1 < x_1 < \Delta_1$, $-\delta_2 < x_2 < \Delta_2$ (图 17). 写出方程、连接条件和边界条件：

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x_1}\left(k\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(k\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)=-f,\\
&\qquad 0<x_1<\Delta_1,\ 0<x_2<\Delta_2,\\
&\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right)=-f,\ -\delta_1<x_1<0,\ -\delta_2<x_2<\Delta_2,\\
&\qquad 0\leqslant x_1<\Delta_1,\ -\delta_2<x_2<0.
\end{aligned}
\tag{24}
$$

$$
\begin{aligned}
&[u]=0,\ k\frac{\partial u}{\partial x_1}(+0,x_2)-\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial x_1}(-0,x_2)=0,\\
&\qquad 0<x_2<\Delta_2,\\
&[u]=0,\ k\frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1,+0)-\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1,-0)=0,\\
&\qquad 0<x_1<\Delta_1,
\end{aligned}
\tag{25}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial x_1}=\kappa_1 u-g_1, \qquad x_1=-\delta_1,\\
&\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial x_2}=\kappa_2 u-g_2, \qquad x_2=-\delta_2.
\end{aligned}
\tag{26}
$$

把(24)中每一个方程在各自的定义区域中积分，利用连接条件(25)和边界条件(26)，

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\varepsilon}\int_{-\delta_2}^{0}\frac{\partial u}{\partial x_1}(\Delta_1,x_2)dx_2+\int_0^{\Delta_2}k\frac{\partial u}{\partial x_1}(\Delta_1,x_2)dx_2\\
&+\frac{1}{\varepsilon}\int_{-\delta_1}^{0}\frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1,\Delta_2)dx_1+\int_0^{\Delta_1}k\frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1,\Delta_2)dx_1\\
&-\int_{-\delta_2}^{\Delta_2}(\kappa_1 u-g_1)\,dx_2-\int_{-\delta_1}^{\Delta_1}(\kappa_2 u-g_2)dx_1\\
&+\int_{-\delta_1}^{\Delta_1}dx_1\int_{-\delta_2}^{\Delta_2}f(x_1,x_2)\,dx_2=0.
\end{aligned}
$$

现在令 Δ_1 和 Δ_2 趋于零；ε, δ_1 和 δ_2 也趋于零，但要满足条件 $\delta_1/\varepsilon = \sigma_1 = \text{const}$, $\delta_2/\varepsilon = \sigma_2 = \text{const}$. 结果得到

$$\sigma_1 \frac{\partial u}{\partial x_2} + \sigma_2 \frac{\partial u}{\partial x_1} = 0, \qquad x_1 = 0, \ x_2 = 0. \tag{27}$$

§ 2. 二阶方程的网格逼近

本节将对 § 1 引入的二阶微分方程建立网格逼近.

1. 不含混合导数的变系数方程的差分逼近. 前一章对泊松方程建立了一系列格式. 这里我们讨论更一般些的二阶椭圆型方程，例如§1中的方程(4):

$$Lu = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(k_1(x)\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(k_2(x)\frac{\partial u}{\partial x_2}\right) = -f(x). \tag{1}$$

设 $\boldsymbol{\Omega}$ 是平面 Ox_1x_2 上的矩形均匀网格. 第二章讲了变系数二阶常微分算子的逼近方法. 因为算子 L 是两个这种类型的算子之和，故可以立即写出方程(1)的逼近. 即

$$\Lambda y = (a_1 y_{\bar{x}_1})_{x_1} + (a_2 y_{\bar{x}_2})_{x_2} = -\varphi(x), \tag{2}$$

这里系数 $a_\alpha(x)$, $\alpha = 1, 2$ 和 $\varphi(x)$, 例如，可以取为

$$a_1(x) = k_1\left(x_1 - \frac{h_1}{2}, x_2\right), \ a_2(x) = k_2\left(x_1, \ x_2 - \frac{h_2}{2}\right),$$

$$\varphi(x) = f(x), \ x = (x_1, x_2), \ \ x_1 = i_1h_1, \ x_2 = i_2h_2. \tag{3}$$

对于这样选择的系数，差分方程(2)将以 $O(|h|^2)$ 的误差逼近方程(1)，这里 $|h|^2 = h_1^2 + h_2^2$. 如果系数 $a_\alpha(x)$ 选作

$$\begin{aligned} a_1(x) &= \frac{k_1(x_1, x_2) + k_1(x_1 - h_1, x_2)}{2}, \\ a_2(x) &= \frac{k_2(x_1, x_2) + k_2(x_1, x_2 - h_2)}{2}, \end{aligned} \tag{4}$$

则逼近误差的阶不变. 还可以用其他的方法选取 a_α 和 φ. 我

们指出，在写差分方程(2)时用的是五点"十字"模式。

现在设 Ω 是任意的非均匀矩形网格且

$$h_\alpha = h_\alpha^{(i_\alpha)} = x_\alpha^{(i_\alpha)} - x_\alpha^{(i_\alpha-1)}, \quad \hbar_\alpha = \frac{h_\alpha + h_\alpha^+}{2},$$

$$h_\alpha^+ = h_\alpha^{(i_\alpha+1)} = x_\alpha^{(i_\alpha+1)} - x_\alpha^{(i_\alpha)}, \quad \alpha = 1, 2.$$

在这个网格上，方程(1)可以用下式逼近：

$$\Lambda y = (a_1 y_{\bar{x}_1})_{\hat{x}} + (a_2 y_{\bar{x}_2})_{\hat{x}_2} = -\varphi(x), \tag{5}$$

这里 a_α, $\alpha = 1, 2$ 和 $\varphi(x)$ 按公式(3)或(4)计算. 注意

$$v_{\hat{x}_\alpha} = \frac{v^{(+1_\alpha)} - v}{\hbar_\alpha}.$$

如同第二章§3对常微分方程所做的那样，方程(5)可以用相继逼近系数的均衡法来构造.

我们来计算以(3)为系数的方程(5)的逼近误差 $\psi = \Lambda u + \varphi$. 由方程(1)，逼近误差可以变成

$$\psi = \Lambda u + \varphi - Lu - f = \sum_{\alpha=1}^{2} \psi_\alpha + (\varphi - f),$$

这里

$$\psi_\alpha = (a_\alpha u_{\bar{x}_\alpha})_{\hat{x}_\alpha} - \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right). \tag{6}$$

我们来计算 ψ_α. 公式

$$w^{(+0.5_\alpha)} = w + \frac{h_\alpha^+}{2}\frac{\partial w}{\partial x_\alpha} + \frac{(h_\alpha^+)^2}{8}\frac{\partial^2 w}{\partial x_\alpha^2} + O((h_\alpha^+)^3),$$

$$w^{(-0.5_\alpha)} = w - \frac{h_\alpha}{2}\frac{\partial w}{\partial x_\alpha} + \frac{h_\alpha^2}{8}\frac{\partial^2 w}{\partial x_\alpha^2} + O(h_\alpha^3)$$

是成立的，由此可得

$$\frac{1}{\hbar_\alpha}\{w^{(+0.5_\alpha)} - w^{(-0.5_\alpha)}\} = \frac{\partial w}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{8\hbar_\alpha}[(h_\alpha^+)^2 - h_\alpha^2]\frac{\partial^2 w}{\partial x_\alpha^2} + O(\hbar_\alpha^3).$$

因为 $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x_\alpha^2}=\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x_\alpha^2}\right)^{(+1_\alpha)}+O(h_\alpha^+)$，故最后一个恒等式可以将 $\dfrac{\partial w}{\partial x_\alpha}$ 表示成形式

$$\frac{\partial w}{\partial x_\alpha}=(w^{(-0.5_\alpha)})_{\hat{x}_\alpha}-\frac{1}{8}\left(h_\alpha^2\frac{\partial^2 w}{\partial x_\alpha^2}\right)_{\hat{x}_\alpha}+O(h_\alpha^2).$$

在上式中令 $w=k_\alpha\dfrac{\partial u}{\partial x_\alpha}$，就有

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right)=\left\{\left(k_\alpha\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right)^{(-0.5_\alpha)}-\frac{1}{8}h_\alpha^2\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha^2}\left(k_\alpha\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right)\right\}_{\hat{x}_\alpha}+O(h_\alpha^2).$$

因而

$$\psi_\alpha=(\eta_\alpha)_{\hat{x}_\alpha}+O(h_\alpha^2), \tag{7}$$

这里

$$\eta_\alpha=a_\alpha u_{\bar{x}_\alpha}-\left(k_\alpha\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right)^{(-0.5_\alpha)}+\frac{h_\alpha^2}{8}\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha^2}\left(k_\alpha\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right).$$

我们来估计 η_α. 因为

$$u=\left(u+0.5h_\alpha\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}+\frac{h_\alpha^2}{8}\frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2}\right)^{(-0.5_\alpha)}+O(h_\alpha^3),$$

$$u^{(-1_\alpha)}=\left(u-0.5h_\alpha\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}+\frac{h_\alpha^2}{8}\frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha}\right)^{(-0.5_\alpha)}+O(h_\alpha^3),$$

所以

$$u_{\bar{x}_\alpha}=\left(\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right)^{(-0.5_\alpha)}+O(h_\alpha^2),$$

从而

$$\eta_\alpha=(a_\alpha-k_\alpha^{(-0.5_\alpha)})\left(\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right)^{(-0.5_\alpha)}+O(h_\alpha^2). \tag{8}$$

现在如果注意到(3)，则对 η_α 有估计式

$$\eta_\alpha=O(h_\alpha^2).$$

这样一来，如果方程（1）的解 $u(x_1, x_2)$ 对 x_1 和 x_2 有直到四阶在内的连续导数，则系数和右端由(3)决定的方程(5)的逼近误差 ψ 可以表示成

$$\psi = \sum_{\alpha=1}^{2} (\eta_\alpha)_{\hat{x}_\alpha} + \psi^*, \psi^* = O(h_1^2 + h_2^2),$$

$$\eta_\alpha = O(h_\alpha^2). \tag{9}$$

2. 具混合导数及变系数的方程的差分格式. 我们研究方程

$$Lu \equiv \sum_{\alpha,\beta=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_{\alpha\beta}\frac{\partial u}{\partial x_\beta}\right) = -f(x). \tag{10}$$

这个方程是 § 1 中方程（6）的特殊情形. 如果它的系数满足 § 1 中的条件(7),它将是椭圆型的.

在均匀网格上构造方程（10）的差分逼近没有多大困难. 容易验证,方程

$$\Lambda y \equiv \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{2}[(k_{\alpha\beta}(x)y_{\bar{x}_\beta})_{x_\alpha} + (k_{\alpha\beta}(x)y_{x_\beta})_{\bar{x}_\alpha}] = -f(x) \tag{11}$$

逼近方程（10），误差为 $O(|h|^2)$. 我们再指出方程(10)的具有同样逼近误差的另一逼近

$$\Lambda y \equiv \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{2}[(k_{\alpha\alpha}y_{\bar{x}_\alpha})_{x_\alpha} + (k_{\alpha\alpha}y_{x_\alpha})_{\bar{x}_\alpha}]$$
$$+ \frac{1}{4}\sum_{\alpha\neq\beta}[(k_{\alpha\beta}y_{\bar{x}_\beta})_{x_\alpha} + (k_{\alpha\beta}y_{\bar{x}_\beta})_{\bar{x}_\alpha}$$
$$+ (k_{\alpha\beta}y_{x_\beta})_{\bar{x}_\alpha} + (k_{\alpha\beta}y_{x_\beta})_{x_\alpha}] = -f(x). \tag{12}$$

当 $k_{\alpha\beta}$ 为常系数时,方程(12)具有如下形式:

$$\sum_{\alpha=1}^{2} k_{\alpha\alpha}y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha} + (k_{12} + k_{21})y_{\hat{x}_1\hat{x}_2} = -f(x), \tag{13}$$

这里

$$v_{\mathring{x}_\alpha} = (v^{(+1_\alpha)} - v^{(-1_\alpha)})/(2h_\alpha).$$

现在在非均匀网格上构造方程(10)的差分逼近．我们利用布本诺夫-伽辽金方法来构造(参看第二章§3)．

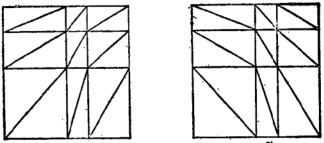
提醒一下(参看第一章)，函数 $u(x)\in W_2^1(G)$ 称为方程(10)在 $W_2^1(G)$ 中的广义解，如果它对任意的函数

$$v(x)\in \mathring{W}_2^1(G)$$

都满足积分恒等式

$$\iint\limits_G \sum_{\alpha,\beta=1}^{2} k_{\alpha\beta}(x)\frac{\partial u}{\partial x_\beta}\frac{\partial v}{\partial x_\alpha}dx_1dx_2 = \iint\limits_G f(x)v(x)dx_1dx_2. \quad (14)$$

函数 $\bar{u}(x)\in V$ 称为方程(10)的近似解，如果它对任意的 $v(x)\in\mathring{V}$ 都满足积分恒等式(14)．这里 V 是空间 $W_2^1(G)$ 的某一有限维子空间，而 $\mathring{V} = V\cap\mathring{W}_2^1(G)$．



a)　　　　　　б)

图 18

我们来给出空间 V．设 Ω 是平面 Ox_1x_2 上的任意非均匀网格，它由两族直线 $x_1 = x_1^{(i_1)}$, $x_2 = x_2^{(i_2)}$, $i_\alpha = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$; $\alpha = 1, 2$ 的交点组成．这些直线把平面 Ox_1x_2 分割成矩形小区域 $G[i] = \{x = (x_1, x_2)|, x_\alpha^{(i_\alpha)} \leqslant x_\alpha \leqslant x_\alpha^{(i_\alpha+1)}\}$．将每个小区域用通过其相对顶点 $(x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_2)})$, $(x_1^{(i_1+1)}, x_2^{(i_2+1)})$ 的直线分成两个三角形(图 18 a)．左上三角形用 $\Delta^+[i]$ 表示，而右下三角形用 $\Delta^-[i]$ 表示．假设 $\bar{G}_h$ 是所有这样的三角形 $\Delta^\pm[i]$ 的总和，这种三角形和区域 G 的交非空，即 $\bar{G}_h = \{x|x$

$\in \Delta^{\pm}[i], \Delta^{\pm}[i] \cap G \neq \varnothing\}$. 这时我们取在 $\overline{G}_h$ 上连续且在每个三角形 $\Delta^{\pm}[i] \in \overline{G}_h$ 上为线性的函数所组成的空间作为空间 $W_2^1(G)$ 的子空间 V.

用 $\bar{\omega} = \overline{G}_h \cap \Omega$ 表示位于 $\overline{G}_h$ 中的 Ω 的节点集合，而用 $\mathfrak{M} = \{i = (i_1, i_2) | x_i \in \bar{\omega}\}$ 表示 $\bar{\omega}$ 的节点标号的集合. 这时方程(10)的近似解可以写成下述形式

$$\bar{u}(x) = \sum_{j \in \mathfrak{M}} y_j \eta_j(x), \qquad j = (j_1, j_2), \tag{15}$$

这里 $\{\eta_j\}$ 是空间 V 的基.

我们来给出 V 的基. 设 $D[i]$ 是由六个三角形 $\Delta^{\pm}[i]$ 合成的六边形，其中每个三角形有一个顶点与节点 x_i 重合（图19）. 我们取仅在 $\bar{\omega}$ 的一个节点上为非零的分片线性连续函数的总体作为 V 的基，并假定这个异于零的值等于 1. 因此，每个基函数 $\eta_i(x)$ 仅在 $D[i]$ 上不为零，且由以下关系式给出:

$$\eta_{i_1 i_2}(x) = \begin{cases} (x_1^{(i_1+1)} - x_1)/h_1^+, & x \in D_1[i] \\ (x_2^{(i_2+1)} - x_2)/h_2^+, & x \in D_2[i] \\ (x_1 - x_1^{(i_1)})/h_1 + (x_2^{(i_2+1)} - x_2)/h_2^+, & x \in D_3[i] \\ (x_1 - x_1^{(i_1-1)})/h_1, & x \in D_4[i] \\ (x_2 - x_2^{(i_2-1)})/h_2, & x \in D_5[i] \\ (x_1^{(i_1+1)} - x_1)/h_1^+ + (x_2 - x_2^{(i_2)})/h_2, & x \in D_6[i] \\ 0 & x \bar{\in} D_\mu[i],\ \mu = 1, \cdots, 6. \end{cases} \tag{16}$$

函数(16)的形状在图 20 中画出. 在所取的这种基上，(15)中的系数 y_j 就是近似解在 $\bar{\omega}$ 的网格节点上的值.

我们来找出 (15) 中未知参数 y_j 应当满足的方程. 为此在(14)中代入

$$u(x) = \bar{u}(x) \text{ 和 } v(x) = \eta_i(x).$$

结果得到如下方程组：

$$\sum_{j\in\mathfrak{M}} A_i^j y_j = \Phi_i, \qquad i\in\mathfrak{M}, \tag{17}$$

其中

$$A_i^j = \sum_{\alpha,\beta=1}^{2} \iint_{G\cap D[i]} k_{\alpha\beta} \frac{\partial\eta_i}{\partial x_\beta}\frac{\partial\eta_j}{\partial x_\alpha} dx_1 dx_2, \tag{18}$$

$$\Phi_i = \iint_{G\cap D[i]} f\eta_i dx_1 dx_2, \quad i=(i_1,i_2),\ j=(j_1,j_2). \tag{19}$$

首先假设系数 $k_{\alpha\beta}$ 都是常数并利用函数 $\eta_i(x)$ 的形状，我们对 $D[i]\subset G$ 的那些 i 值来计算系数 A_i^j.

由(16)求得

$$\frac{\partial\eta_i}{\partial x_1} = \begin{cases} -1/h_1^+, & x\in D_1 \\ 0, & x\in D_2 \\ 1/h_1, & x\in D_3 \\ 1/h_1, & x\in D_4 \\ 0, & x\in D_5 \\ -1/h_1^+, & x\in D_6 \\ 0, & x\bar{\in} D_\mu, \quad \mu=1,\cdots,6, \end{cases}$$

$$\frac{\partial\eta_i}{\partial x_2} = \begin{cases} 0, & x\in D_1, \\ -1/h_2^+, & x\in D_2, \\ -1/h_2^+, & x\in D_3, \\ 0, & x\in D_4, \\ 1/h_2, & x\in D_5, \\ 1/h_2, & x\in D_6, \\ 0, & x\bar{\in} D_\mu,\ \mu=1,\cdots,6. \end{cases} \tag{20}$$

由(18)和(20)可知，只有以下系数可能不为 0：

$$A_{i_1i_2}^{i_1i_2},\ A_{i_1i_2}^{i_1+1,i_2},\ A_{i_1i_2}^{i_1-1,i_2},\ A_{i_1i_2}^{i_1,i_2-1},\ A_{i_1i_2}^{i_1,i_2+1},$$
$$A_{i_1i_2}^{i_1+1,i_2+1},\ A_{i_1i_2}^{i_1-1,i_2-1}.$$

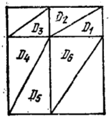


图 19

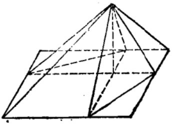


图 20

计算表明,

$$
\begin{aligned}
A_{i_1i_2}^{i_1i_2} &= \frac{k_{11}}{2}\left(\frac{h_2^+}{h_1^+}+\frac{h_2}{h_1}+\frac{h_2^+}{h_1}+\frac{h_2}{h_1^+}\right)\\
&\quad+\frac{k_{22}}{2}\left(\frac{h_1^+}{h_2^+}+\frac{h_1}{h_2}+\frac{h_1}{h_2^+}+\frac{h_1^+}{h_2}\right)-(k_{12}+k_{21}),\\
A_{i_1i_2}^{i_1+1,i_2} &= -\frac{k_{11}}{2}\left(\frac{h_2^+}{h_1^+}+\frac{h_2}{h_1^+}\right)+\frac{k_{12}+k_{21}}{2},\\
A_{i_1i_2}^{i_1-1,i_2} &= -\frac{k_{11}}{2}\left(\frac{h_2^+}{h_1}+\frac{h_2}{h_1}\right)+\frac{k_{12}+k_{21}}{2},\\
A_{i_1i_2}^{i_1,i_2+1} &= -\frac{k_{22}}{2}\left(\frac{h_1^+}{h_2^+}+\frac{h_1}{h_2^+}\right)+\frac{k_{12}+k_{21}}{2},\\
A_{i_1i_2}^{i_1,i_2-1} &= -\frac{k_{22}}{2}\left(\frac{h_1^+}{h_2}+\frac{h_1}{h_2}\right)+\frac{k_{12}+k_{21}}{2}\\
A_{i_1i_2}^{i_1+1,i_2+1} &= A_{i_1i_2}^{i_1-1,i_2-1} = -\frac{k_{12}+k_{21}}{2}.
\end{aligned}
\tag{21}
$$

将(21)代入(17)并经过变换,得到

$$
\begin{aligned}
\Lambda^+y &\equiv k_{11}y_{\bar{x}_1\hat{x}_1}+k_{22}y_{x_2\check{x}_2}+\frac{k_{12}+k_{21}}{2}\\
&\quad\times(y_{\hat{x}_1\hat{x}_2}+y_{\check{x}_1\check{x}_2})=\frac{-1}{\hbar_1\hbar_2}\Phi.
\end{aligned}
$$

现在设 $k_{\alpha\beta}$ 是变系数. 在这种情况下, 类似于刚才所构造的逼近式,我们写出方程(10)的差分逼近

$$
\Lambda^+ y \equiv \frac{1}{2}\left\{\sum_{\alpha=1}^{2}\left[(k_{\alpha\alpha}y_{\bar{x}_\alpha})_{\hat{x}_\alpha} + (k_{\alpha\alpha}y_{x_\alpha})_{\check{x}_\alpha}\right] + \sum_{\substack{\alpha,\beta=1\\ \alpha\neq\beta}}^{2}\left[(k_{\alpha\beta}y_{\hat{x}_\beta})_{\hat{x}_\alpha} + (k_{\alpha\beta}y_{\check{x}_\beta})_{\check{x}_\alpha}\right]\right\} = -f(x). \tag{22}
$$

我们来计算方程(22)的逼近误差 $\psi^+ = \Lambda^+ u + f$. 首先改写 ψ^+, 根据(10)将 f 换成 $-Lu$ 并将它写成和的形式

$$
\psi^+ = \Lambda^+ u - Lu = \sum_{\alpha,\beta=1}^{2} \psi^+_{\alpha\beta},
$$

其中

$$
\psi^+_{\alpha\alpha} = \frac{1}{2}\left[(k_{\alpha\alpha}u_{\bar{x}_\alpha})_{\hat{x}_\alpha} + (k_{\alpha\alpha}u_{x_\alpha})_{\check{x}_\alpha}\right] - \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_{\alpha\alpha}\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right),
$$

$$
\psi^+_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left[(k_{\alpha\beta}u_{\hat{x}_\beta})_{\hat{x}_\alpha} + (k_{\alpha\beta}u_{\check{x}_\beta})_{\check{x}_\alpha}\right] - \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_{\alpha\beta}\frac{\partial u}{\partial x_\beta}\right), \quad \alpha \neq \beta.
$$

考虑到

$$
\frac{1}{2}\left[(k_{\alpha\alpha}u_{\bar{x}_\alpha})_{\hat{x}_\alpha} + (k_{\alpha\alpha}u_{x_\alpha})_{\check{x}_\alpha}\right] = \frac{1}{2}\left((k_{\alpha\alpha} + k_{\alpha\alpha}^{(-1_\alpha)})u_{\bar{x}_\alpha}\right)_{\hat{x}_\alpha},
$$

并注意到(6),(7),我们求得

$$
\psi^+_{\alpha\alpha} = (\eta^+_{\alpha\alpha})_{\hat{x}_\alpha} + O(h_\alpha^2),
$$

又因为

$$
k_{\alpha\alpha} + k_{\alpha\alpha}^{(-1_\alpha)} - 2k_{\alpha\alpha}^{(-0.5_\alpha)} = O(h_\alpha^2),
$$

则根据(8)

$$
\eta^+_{\alpha\alpha} = O(h_\alpha^2).
$$

其次

$$(k_{\alpha\alpha}u_{\dot{x}_\beta})_{\dot{x}_\alpha}+(k_{\alpha\beta}u_{\check{x}_\beta})_{\check{x}_\alpha}=\frac{h_1^+h_2^+}{\hbar_1\hbar_2}(k_{\alpha\beta}u_{x_\beta})_{x_\alpha}$$

$$+\frac{h_1h_2}{\hbar_1\hbar_2}(k_{\alpha\beta}u_{\bar{x}_\beta})_{\bar{x}_\alpha}=\frac{h_1^+h_2^++h_1h_2}{\hbar_1\hbar_2}$$

$$\times\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_{\alpha\beta}\frac{\partial u}{\partial x_\beta}\right)+\frac{(h_\alpha^+)^2h_\beta^+-h_\alpha^2h_\beta}{2\hbar_1\hbar_2}$$

$$\times\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha^2}\left(k_{\alpha\beta}\frac{\partial u}{\partial x_\beta}\right)+\frac{h_\alpha^+(h_\beta^+)^2-h_\alpha h_\beta^2}{2\hbar_1\hbar_2}$$

$$\times\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_{\alpha\beta}\frac{\partial^2 u}{\partial x_\beta^2}\right)+O(\hbar_1^2+\hbar_2^2),$$

所以

$$\psi_{\alpha\beta}^+=\frac{(h_1^+-h_1)(h_2^+-h_2)}{4\hbar_1\hbar_2}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_{\alpha\beta}\frac{\partial u}{\partial x_\beta}\right)$$

$$+\frac{(h_\alpha^+)^2h_\beta^+-h_\alpha^2h_\beta}{4\hbar_1\hbar_2}\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha^2}\left(k_{\alpha\beta}\frac{\partial u}{\partial x_\beta}\right)$$

$$+\frac{h_\alpha^+(h_\beta^+)^2-h_\alpha h_\beta^2}{4\hbar_1\hbar_2}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_{\alpha\beta}\frac{\partial^2 u}{\partial x_\beta^2}\right)$$

$$+O(\hbar_1^2+\hbar_2^2),\qquad \alpha\neq\beta.$$

将 $\psi_{\alpha\beta}^+$ 代入 ψ^+ 的表达式，得到 $\psi^+=O(1)$，即在节点上不逼近.

我们来构造方程(10)的其他逼近式. 对此应用同样的方法，但将平面分割成三角形是采用另一种办法，如图 18 b 所示. 经过类似的推导，得方程

$$\Lambda^-y=\frac{1}{2}\left\{\sum_{\alpha=1}^{2}\left[(k_{\alpha\alpha}y_{\bar{x}_\alpha})_{\dot{x}_\alpha}+(k_{\alpha\alpha}y_{x_\alpha})_{\check{x}_\alpha}\right]\right.$$

$$\left.+\sum_{\substack{\alpha,\beta=1\\ \alpha\neq\beta}}^{2}\left[(k_{\alpha\beta}y_{\check{x}_\beta})_{\dot{x}_\alpha}+(k_{\alpha\beta}y_{\dot{x}_\beta})_{\check{x}_\alpha}\right]\right\}=-f,$$

它的逼近误差是

$$\psi^- = \sum_{\alpha,\beta=1}^{2} \psi^-_{\alpha\beta},$$

其中 $\psi^-_{\alpha\alpha} = \psi^+_{\alpha\alpha}$，而

$$\psi^-_{\alpha\beta} = -\frac{(h_1^+ - h_1)(h_2^+ - h_2)}{4\hbar_1\hbar_2} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_{\alpha\beta}\frac{\partial u}{\partial x_\beta}\right)$$
$$+ \frac{(h_\alpha^+)^2 h_\beta - h_\alpha^2 h_\beta^+}{4\hbar_1\hbar_2} \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha^2}\left(k_{\alpha\beta}\frac{\partial u}{\partial x_\beta}\right)$$
$$+ \frac{h_\alpha(h_\beta^+)^2 - h_\alpha^+ h_\beta^2}{4\hbar_1\hbar_2} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_{\alpha\beta}\frac{\partial^2 u}{\partial x_\beta^2}\right)$$
$$+ O(\hbar_1^2 + \hbar_2^2), \qquad \alpha \neq \beta,$$

因此 $\psi^- = O(1)$.

利用算子 Λ^+ 和 Λ^- 建立新算子 $\Lambda = \frac{1}{2}(\Lambda^+ + \Lambda^-)$，并用它写出方程(10)的新逼近式

$$\Lambda y \equiv \frac{1}{2}(\Lambda^+ + \Lambda^-)y = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{2}[(k_{\alpha\alpha}y_{\bar{x}_\alpha})_{\hat{x}_\alpha} + (k_{\alpha\alpha}y_{x_\alpha})_{\check{x}_\alpha}]$$
$$+ \frac{1}{4}\sum_{\substack{\alpha,\beta=1\\ \alpha\neq\beta}}^{2}[(k_{\alpha\beta}y_{\check{x}_\beta})_{\hat{x}_\alpha} + (k_{\alpha\beta}y_{\hat{x}_\beta})_{\check{x}_\alpha} + (k_{\alpha\beta}y_{\hat{x}_\beta})_{\hat{x}_\alpha}$$
$$+ (k_{\alpha\beta}y_{\check{x}_\beta})_{\check{x}_\alpha}] = -f(x). \tag{23}$$

我们来计算方程(23)的逼近误差. 利用 $\psi^\pm_{\alpha\beta}$ 的表达式得到

$$\psi = \Lambda u + f = \sum_{\alpha=1}^{2}(\eta_\alpha)_{\hat{x}_\alpha} + \psi^*, \eta_\alpha = O(h_\alpha^2),$$
$$\psi^* = O(\hbar_1^2 + \hbar_2^2). \tag{24}$$

注. 在均匀网格上，方程(23)和前面建立的方程(12)相同.

3. 含混合导数的常系数方程的高阶逼近格式. 我们来构造在常系数情况下以误差 $O(|h|^4)$ 逼近方程(10)的差分格式. 采用九点"箱形"模式来写差分方程. 当在第三章构造泊

松方程的高阶逼近格式时我们已经用过这个模式． 可是看来，只有在网格步长 h_1 和 h_2 按一定方式与系数 k_{11} 和 k_{22} 相联系的条件下，才有可能在上述模式上以 $O(|h|^4)$ 的误差逼近方程(10)．我们假定 $k_{11}=k_{22}=1$，$k_{12}=k_{21}=\kappa$． 这时网格 Ω 应是正方形的．

首先研究差分算子

$$\Lambda v = v_{\bar{x}_1x_1} + v_{\bar{x}_2x_2} + \kappa\sigma(v_{\bar{x}_1x_2} + v_{x_1x_2}) + \kappa(1-\sigma)(v_{\bar{x}_1\bar{x}_2} + v_{x_1x_2}),$$

其中 σ 是某一任意参数．将函数 Λv 按 h 的幂次展开

$$\Lambda v = Lv + \frac{h^2}{12}\left(\frac{\partial^4 v}{\partial x_1^4} + \frac{\partial^4 v}{\partial x_2^4}\right) + \frac{\kappa h^2}{3} \times \left(\frac{\partial^4 v}{\partial x_1^3\partial x_2} + \frac{\partial^4 v}{\partial x_1\partial x_2^3}\right) + \frac{\kappa(1-2\sigma)}{2}h^2 \times \frac{\partial^4 v}{\partial x_1^2\partial x_2^2} + O(h^4) = Lv + \frac{h^2}{12}L^2 v - \frac{h^2}{6}[1-3(1-2\sigma)\kappa + 2\kappa^2] \times \frac{\partial^4 v}{\partial x_1^2\partial x_2^2} + O(h^4).$$

由此得出，差分方程

$$\Lambda' y = y_{\bar{x}_1x_1} + y_{\bar{x}_2x_2} + \kappa[\sigma(y_{\bar{x}_1x_2} + y_{x_1\bar{x}_2}) + (1-\sigma)(y_{\bar{x}_1\bar{x}_2} + y_{x_1x_2})] + \frac{h^2}{6}(1-3(1-2\sigma)\kappa + 2\kappa^2)y_{\bar{x}_1x_1\bar{x}_2x_2} = -\varphi' \tag{25}$$

对任意参数 σ 都以误差 $O(h^4)$ 逼近方程(10)，式中

$$\varphi' = f + \frac{h^2}{12}Lf. \tag{26}$$

我们指出，方程(25)实际上并不依赖于参数 σ． 容易验

证，

$$y_{\bar{x}_1\bar{x}_2}=y_{x_1\bar{x}_2}-hy_{\bar{x}_1x_1\bar{x}_2},\quad y_{x_1x_2}=y_{\bar{x}_1x_2}+hy_{\bar{x}_1x_1x_2},$$

因此，

$$y_{\bar{x}_1\bar{x}_2}+y_{x_1x_2}=y_{x_1\bar{x}_2}+y_{\bar{x}_1x_2}+h^2y_{\bar{x}_1x_1\bar{x}_2x_2}.$$

把此式代入 $\Lambda'y$，得出

$$\begin{aligned}\Lambda'y=&\ y_{\bar{x}_1x_1}+y_{\bar{x}_2x_2}+\kappa[\sigma(y_{\bar{x}_1x_2}+y_{x_1\bar{x}_2})+y_{x_1\bar{x}_2}\\&+y_{\bar{x}_1x_1}+h^2y_{\bar{x}_1x_1\bar{x}_2x_2}-\sigma(y_{\bar{x}_1x_2}+y_{x_1\bar{x}_2}\\&+h^2y_{\bar{x}_1x_1\bar{x}_2x_2})]+h^2\left(\frac{1}{6}-\frac{\kappa}{2}+\kappa\sigma+\frac{\kappa^2}{3}\right)\\&\times y_{\bar{x}x_1\bar{x}_2x_2}=y_{\bar{x}_1x_1}+y_{\bar{x}_2x_2}+\kappa(y_{\bar{x}_1x_2}+y_{x_1\bar{x}_2})\\&+\frac{h^2}{6}(1+3\kappa+2\kappa^2)y_{\bar{x}_1x_1\bar{x}_2x_2}.\end{aligned}$$

因而差分方程(25)具有形状

$$\begin{aligned}\Lambda'y=&\ y_{\bar{x}_1x_1}+y_{\bar{x}_2x_2}+\kappa(y_{\bar{x}_1x_2}+y_{x_1\bar{x}_2})\\&+\frac{h^2}{6}(1+3\kappa+2\kappa^2)y_{\bar{x}_1x_1\bar{x}_2x_2}=-\varphi'.\end{aligned}\tag{27}$$

4. 含低阶项方程的差分格式. 讨论方程

$$\begin{aligned}Lu=&\sum_{\alpha=1}^{2}\left[\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right)+r_\alpha(x)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right]\\=&-f(x),\end{aligned}\tag{28}$$

并对它构造均匀网格 Ω 上的差分格式.

方程(28)的最简单二阶逼近格式如下:

$$\begin{aligned}\Lambda y=\sum_{\alpha=1}^{2}[(a_\alpha(x)y_{\bar{x}_\alpha})_{x_\alpha}+r_\alpha(x)y_{\mathring{x}_\alpha}]=-f(x),\\x=(x_1,x_2)\in\Omega,\end{aligned}\tag{29}$$

其中 $a_\alpha(x)$，例如，按公式(3)计算. 我们把方程(29)写成

$$\sum_{\alpha=1}^{2}\frac{a_\alpha^{(+1_\alpha)}+a_\alpha}{h_\alpha^2}y=\sum_{\alpha=1}^{2}\left\{\left(\frac{a_\alpha^{(+1_\alpha)}}{h_\alpha^2}+\frac{r_\alpha}{2h_\alpha}\right)\right.$$

$$\times y^{(+1_\alpha)} + \left(\frac{a_\alpha}{h_\alpha^2} - \frac{r_\alpha}{2h_\alpha}\right) y^{(-1_\alpha)}\bigg\} + f(x).$$

由此看出，当系数 $r_\alpha(x)$ 比系数 $k_\alpha(x)$ 大得多时，只有对足够小的 h_α，最大值原理(参看第三章)对格式 (29) 才成立. 为了去掉这一限制，我们来构造方程(28)的其他格式.

把方程(28)改写成

$$Lu = \sum_{\alpha=1}^{2}\left[\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right) + \frac{r_\alpha(x)}{k_\alpha(x)}\right.$$

$$\left.\times k_\alpha(x)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right] = -f(x),$$

并且对高阶项和低阶项中的流量

$$-k_\alpha(x)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}$$

作同样的逼近；于是得到

$$\Lambda y = \sum_{\alpha=1}^{2}\left[(a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha})_{x_\alpha}\right.$$

$$\left. + \frac{r_\alpha}{2k_\alpha}(a_\alpha^{(+1_\alpha)} y_{x_\alpha} + a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha})\right] = -f(x). \qquad (30)$$

显然，算子的逼近误差为 $O(|h|^2)$. 对低阶项作如下改变：

$$\begin{aligned}\frac{r_\alpha}{2k_\alpha} a_\alpha^{(+1_\alpha)} y_{x_\alpha} &= \frac{r_\alpha + |r_\alpha|}{2k_\alpha} a_\alpha^{(+1_\alpha)} y_{x_\alpha} - \frac{|r_\alpha|}{2k_\alpha} a_\alpha^{(+1_\alpha)} y_{x_\alpha}, \\ \frac{r_\alpha}{2k_\alpha} a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha} &= \frac{r_\alpha - |r_\alpha|}{2k_\alpha} a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha} + \frac{|r_\alpha|}{2k_\alpha} a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha},\end{aligned} \qquad (31)$$

并记 $\frac{r_\alpha + |r_\alpha|}{2} = r_\alpha^+ \geqslant 0$, $\frac{r_\alpha - |r_\alpha|}{2} = r_\alpha^- \leqslant 0$, 当 $r_\alpha \leqslant 0$ 时 $r_\alpha^+ = 0$, 当 $r_\alpha \geqslant 0$ 时 $r_\alpha^- = 0$. 这时把(31)代入(30)，有

$$\Lambda y = \sum_{\alpha=1}^{2}\left[\left(1 - \frac{h_\alpha|r_\alpha|}{2k_\alpha}\right)(a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha})_{x_\alpha} + \frac{r_\alpha^+}{k_\alpha} a_\alpha^{(+1_\alpha)} y_{x_\alpha}\right.$$

$$+\frac{r_\alpha^-}{k_\alpha}a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha}\Big].$$

但

$$1-\frac{h_\alpha|r_\alpha|}{2k_\alpha}=\frac{1}{1+\dfrac{h_\alpha|r_\alpha|}{2k_\alpha}}+O(h_\alpha^2).$$

所以可以取差分格式

$$\sum_{\alpha=1}^{2}\Bigg[\frac{1}{1+\dfrac{h_\alpha|r_\alpha|}{2k_\alpha}}(a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha})_{x_\alpha}+\frac{r_\alpha^+}{k_\alpha}a_\alpha^{(+1_\alpha)}y_{x_\alpha}$$

$$+\frac{r_\alpha^-}{k_\alpha}a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha}\Bigg]=-f(x). \qquad (32)$$

这个格式的逼近误差为 $O(|h|^2)$，并且容易验证，对任意的 h_α，最大值原理对这个格式都成立．

§3. 二阶方程连接条件和边界条件的逼近

本节对 §1 中提出的连接条件和边界条件构造差分逼近．主要精力放在构造第二和第三类边界条件的差分逼近．

1. 连接条件的差分逼近． 设 §1 中方程(4)

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(k_1(x_1,x_2)\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(k_2(x_1,x_2)\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)$$

$$=-f(x_1,x_2) \qquad (1)$$

的热传导系数 $k_1(x)$ 在直线 $x_1=0$ 上有第一类间断，要求这个方程满足 §1 中连接条件 (9)，

$$u(+0,x_2)-u(-0,x_2)=0,$$

$$k_1(+0,x_2)\frac{\partial u}{\partial x_1}\bigg|_{x_1=+0}-k_1(-0,x_2)\frac{\partial u}{\partial x_1}\bigg|_{x_1=-0}=0 \qquad (2)$$

的解．为简单起见，设方程(1)的系数 $k_2(x)$ 和右端 $f(x)$ 在

$x_1=0$ 连续．我们来构造连接条件(2)的逼近式．假设取网格使间断线 $x_1=0$ 通过网格节点．根据条件(2)的第一式，未知解在 $x_1=0$ 连续，所以网格函数在 $x_1=0$ 的值也就是未知解的逼近．

我们写出条件(2)第二式的最简单逼近

$$a_1(h_1, x_2)y_{x_1} - a_1(0, x_2)y_{\bar{x}_1} = 0,$$

其中系数 $a_1(x)$，例如，由 § 2 中关系式(3)给出，即

$$a_1(x) = k_1\left(x_1 - \frac{h_1}{2}, x_2\right),$$

并计算它的误差

$$\begin{aligned}\psi &= a_1(h_1, x_2)u_{x_1} - a_1(0, x_2)u_{\bar{x}_1} = k_1(+0, x_2) \\ &\times \frac{\partial u}{\partial x_1}(+0, x_2) - k_1(-0, x_2)\frac{\partial u}{\partial x_1}(-0, x_2) \\ &+ \frac{h_1}{2}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(k_1\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)\Big|_{x_1=+0} + \frac{h_1}{2}\frac{\partial}{\partial x_1} \\ &\times \left(k_1\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)\Big|_{x_1=-0} + O(h_1^2). \end{aligned} \tag{3}$$

利用方程 (1)，将 $\frac{\partial}{\partial x_1}\left(k_1\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)$ 用 $\frac{\partial}{\partial x_2}\left(k_2\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)$ 和 $f(x)$ 表示并代入(3)，

$$\begin{aligned}\psi &= -h_1\frac{\partial}{\partial x_2}\left(k_2\frac{\partial u}{\partial x_2}\right) - h_1 f(x) + O(h_1^2) \\ &= -h_1(a_2 u_{\bar{x}_2})_{x_2} - h_1 f(x) + O(h_1^2 + h_2^2).\end{aligned}$$

由此可见，逼近误差为 $O(h_1)$，但如果连接条件(2)的第二式用关系式

$$\begin{aligned}&a_1(h_1, x_2)y_{x_1} - a_1(0, x_2)y_{\bar{x}_1} + h_1(a_2 y_{\bar{x}_2})_{x_2} + h_1 f(x) \\ &= 0\end{aligned} \tag{4}$$

逼近，则新方程的误差将为 $O(h_1^2 + h_2^2)$．如果把方程 (4) 除以 h_1 并适当变形，则它取以下形式：

$$(a_1 y_{\bar{x}_1})_{x_1} + (a_2 y_{\bar{x}_2})_{x_2} = -f(x),$$

即与§2中没有间断的其他节点的差分方程(2)完全一样.

现在来求方程(1)满足§1中连接条件(12)和(13),即

$$\kappa[u]\big|_{x_1=0} = k_1 \frac{\partial u}{\partial x_1}\bigg|_{x_1=-0}, \quad \kappa[u]\big|_{x_1=0} = k_1 \frac{\partial u}{\partial x_1}\bigg|_{x_1=+0} \tag{5}$$

的解,在这里系数 $k_1(x)$ 在直线 $x_1 = 0$ 上出现间断. 网格的选择和前面的一样. 这一次方程(1)的解在 $x_1 = 0$ 上有第一类间断,所以,逼近方程(1)的解的网格函数 $y(x)$ 在 $x_1 = 0$ 上应当有两个值. 记这两个值为 $y^+(0, x_2)$ 和 $y^-(0, x_2)$. 我们用条件(5)的最简单的逼近式

$$\kappa(y^+ - y^-) = a_1(0, x_2) y_{\bar{x}_1}, \quad \kappa(y^+ - y^-) = a_1(h_1, x_2) y_{x_1},$$

其中

$$y_{\bar{x}_1} = \frac{1}{h_1}[y^-(0, x_2) - y(-h_1, x_2)],$$

$$y_{x_1} = \frac{1}{h_1}[y(h_1, x_2) - y^+(0, x_2)],$$

并计算这些方程的逼近误差. 第一个方程的逼近误差等于

$$\begin{aligned}\psi_1 = \kappa[u] - a_1(0, x_2) u_{\bar{x}_1} &= \kappa[u] - k_1 \frac{\partial u}{\partial x_1}\bigg|_{x_1=-0} \\ &\quad + \frac{h_1}{2}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(k_1 \frac{\partial u}{\partial x_1}\right)_{x_1=-0} + O(h_1^2) \\ &= -\frac{h_1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\left(k_2 \frac{\partial u}{\partial x_2}\right) + f\right)_{x_1=-0} + O(h_1^2) \\ &= -\frac{h_1}{2}[(a_2 u_{\bar{x}_2})_{x_2} + f]_{x_1=-0} + O(h_1^2 + h_2^2).\end{aligned}$$

类似地算出第二个方程的逼近误差

$$\begin{aligned}\psi_2 &= \kappa[u] - a_1(h_1, x_2) u_{x_1} \\ &= \frac{h_1}{2}[(a_2 u_{\bar{x}_2})_{x_2} + f]_{x_1=+0} + O(h_1^2 + h_2^2).\end{aligned}$$

由引入的展式可知，两个方程的逼近误差都是 $O(h_1)$，但方程

$$\kappa(y^+ - y^-) - a_1 y_{x_1} + \frac{h_1}{2}(a_2 y_{\bar{x}_2})_{x_2} + \frac{h_1}{2} f = 0,$$

$$\kappa(y^+ - y^-) - a_1^{(+1_1)} y_{x_1} - \frac{h_1}{2}(a_2 y^+_{\bar{x}_2})_{x_2} - \frac{h_1}{2} f = 0$$

的逼近误差将是 $O(h_1^2 + h_2^2)$. 把这两个方程均除以 $h_1/2$:

$$\begin{aligned} &\frac{\kappa(y^+ - y^-) - a_1 y_{x_1}}{0.5h_1} + (a_2 y_{\bar{x}_2})_{x_2} = -f, \\ &\frac{a_1^{(+1_1)} y_{x_1} - \kappa(y^+ - y^-)}{0.5h_1} + (a_2 y^+_{\bar{x}_2})_{x_2} = -f. \end{aligned} \qquad (6)$$

这种形式的方程 (6) 类似于 § 2 中在其他网格节点上的方程 (2).

如果在 $x_1 = 0$ 上对方程(1)给出了 § 1 的连接条件(14)，则与连接条件(2)的情况一样，可以构造它们的网格逼近

$$(a_1 y_{\bar{x}_1})_{x_1} + (a_2 y_{\bar{x}_2})_{x_2} = -f(0, x_2) - \frac{\alpha(x_2)}{h_1}. \qquad (7)$$

2. 不含混合导数的方程边界条件的逼近. 现在讨论边界条件的逼近. 我们开始讨论方程(1)的边界条件. 首先对§1中的第二类边界条件(16)和第三类边界条件(17)构造差分逼近. 暂时假定方程(1)在矩形

$$G = \{x = (x_1, x_2) | 0 < x_\alpha < l_\alpha, \alpha = 1, 2\}$$

中求解，在其边界 Γ 上满足 § 1 中的第三类边界条件(17). 将所讨论的问题详细写出来就是

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(k_1 \frac{\partial u}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(k_2 \frac{\partial u}{\partial x_2}\right) = -f(x), \qquad (1)$$

$$k_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} = \kappa_{-\alpha} u - g_{-\alpha}(x_\beta), \quad x_\alpha = 0,$$

$$-k_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} = \kappa_{+\alpha} u - g_{+\alpha}(x_\beta), \quad x_\alpha = l_\alpha, \tag{8}$$

$$\alpha, \beta = 1, 2, \quad \alpha \neq \beta.$$

正如第一章所指出的，求解问题(1)，(8)等价于求一个使下列泛函达到极小的元素

$$J(v) = \int_G \left[k_1(x)\left(\frac{\partial v}{\partial x_1}\right)^2 + k_2(x)\left(\frac{\partial v}{\partial x_2}\right)^2 - 2f(x)v\right]dx$$

$$+ \sum_{\alpha=1}^{2}\int_0^{l_\beta} \{[\kappa_{-\alpha}v^2 - 2g_{-\alpha}v]|_{x_\alpha=0}$$

$$+ [\kappa_{+\alpha}v^2 - 2g_{+\alpha}v]|_{x_\alpha=l_\alpha}\}dx_\beta. \tag{9}$$

我们用逼近泛函(9)的方法（参看第二章§3）构造问题(1)，(8)的差分格式．在闭区域 $\overline{G} = G \cup \Gamma$ 上引入均匀矩形网格 $\overline{\omega} = \overline{\omega}_1 \times \overline{\omega}_2 = \{x = (x_1, x_2) | x_\alpha \in \overline{\omega}_\alpha, \alpha = 1, 2\}$，这里 $\overline{\omega}_\alpha = \{x_\alpha | x_\alpha = i_\alpha h_\alpha, i_\alpha = 0, 1, \cdots, N_\alpha, h_\alpha = l_\alpha/N_\alpha\}$ 是线段 $[0, l_\alpha]$ 上的网格．$\overline{\omega}$ 的内节点集合记为 $\omega = \{x = (x_1, x_2) | x_\alpha \in \omega_\alpha, \alpha = 1, 2\}$，其中 $\omega_\alpha = \{x_\alpha^{(i_\alpha)} | i_\alpha = 1, 2, \cdots, N_\alpha - 1\}$，而边界节点的集合记为 $\gamma = \overline{\omega} \backslash \omega$．此外，假设

$$\omega_\alpha^+ = \{x_\alpha^{(i_\alpha)} | i_\alpha = 1, 2, \cdots, N_\alpha\},$$
$$^+\omega_\alpha = \{x_\alpha^{(i_\alpha)} | i_\alpha = 0, 1, \cdots, N_\alpha - 1\}.$$

我们还采用记号

$$\hbar_\alpha = \begin{cases} h_\alpha, & x_\alpha \in \omega_\alpha, \\ h_\alpha/2, & x_\alpha = 0, l_\alpha. \end{cases}$$

对泛函(9)中出现的所有积分都用求积公式代替．一般说来，对不同的积分使用不同的求积公式．在二重积分

$$\int_G k_1(x)\left(\frac{\partial v}{\partial x_1}\right)^2 dx = \int_0^{l_1}\int_0^{l_2} k_1(x_1 x_2)\left(\frac{\partial v(x_1, x_2)}{\partial x_1}\right)^2 dx_1 dx_2$$

中对 x_1 的积分使用中心矩形求积公式，而对 x_2 的积分使用梯形求积公式

$$\int_G k_1(x)\left(\frac{\partial v}{\partial x_1}\right)^2 dx \sim \sum_{x_1\in\omega_1^+}\sum_{x_2\in\bar{\omega}_2} k_1\left(x_1-\frac{h_1}{2},\ x_2\right)$$

$$\times\left(\frac{\partial v}{\partial x_1}\left(x_1-\frac{h_1}{2},\ x_2\right)\right)^2 h_1\hbar_2. \tag{10}$$

在积分 $\int_G k_2(x)\left(\frac{\partial v}{\partial x_2}\right)^2 dx$ 中对 x_1 的积分使用梯形公式，而对 x_2 的积分使用中心矩形公式：

$$\int_G k_2(x)\left(\frac{\partial v}{\partial x_2}\right)^2 dx$$

$$\sim\sum_{x_1\in\bar{\omega}_1}\sum_{x_2\in\omega_2^+} k_2\left(x_1,\ x_2-\frac{h_2}{2}\right)$$

$$\times\left(\frac{\partial v}{\partial x_2}\left(x_1,\ x_2-\frac{h_2}{2}\right)\right)^2 \hbar_1 h_2. \tag{11}$$

在(9)的最后一个二重积分中，无论是对 x_1 的积分还是对 x_2 的积分都用梯形公式代替

$$\int_G[-2f(x)v]dx \sim -2\sum_{x_1\in\bar{\omega}_1}\sum_{x_2\in\bar{\omega}_2} f(x_1,\ x_2)v(x_1,\ x_2)\hbar_1\hbar_2. \tag{12}$$

边界上的所有积分都用梯形求积公式代替，

$$\int_0^{l_\beta}[(\kappa_{-\alpha}v^2-2g_{-\alpha}v)|_{x_\alpha=0}+(\kappa_{+\alpha}v^2-2g_{+\alpha}v)|_{x_\alpha=l_\alpha}]dx_\beta$$

$$\sim\sum_{\bar{\omega}_\beta}[(\kappa_{-\alpha}v^2-2g_{-\alpha}v)|_{x_\alpha=0}$$

$$+(\kappa_{+\alpha}v^2-2g_{+\alpha}v)|_{x_\alpha=l_\alpha}]\hbar_\beta. \tag{13}$$

公式(10)和(11)中的导数用差商逼近，

$$\frac{\partial v}{\partial x_1}\left(x_1-\frac{h_1}{2},\ x_2\right)\sim v_{\bar{x}_1},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x_2}\left(x_1,\ x_2-\frac{h_2}{2}\right)\sim v_{\bar{x}_2}. \tag{14}$$

现在将逼近式(10)—(14)代入(9)，结果得到泛函(9)的如下逼近式:

$$J_h(v)=\sum_{\omega_1^+\times\omega_2} a_1 v_{\bar{x}_1}^2 h_1\hbar_2+\sum_{\omega_1\times\omega_2^+} a_2 v_{\bar{x}_2}^2\hbar_1 h_2-2\sum_{\bar{\omega}_1\times\bar{\omega}_2} fv\hbar_1\hbar_2$$

$$+\sum_{\alpha=1}^{2}\sum_{\bar{\omega}_\beta}[(\kappa_{-\alpha}v^2-2g_{-\alpha}v)|_{x_\alpha=0}$$

$$+(\kappa_{+\alpha}v^2-2g_{+\alpha}v)|_{x_\alpha=l_\alpha}]\hbar_\beta, \tag{15}$$

其中 $a_\alpha=k_\alpha^{(-0.5_\alpha)}$.

于是,泛函(9)的极小问题化成近似泛函 (15) 的极小问题. 但 $J_h(v)$ 正好是多变量 $v(x_i)$, $x_i\in\bar{\omega}$ 的函数. 这个函数的极小值在点 $v(x)=y(x)$ 达到，这时其一阶导数成为零.

设 $x\in\omega$. 计算 $J_h(v)$ 对 $v(x)$ 的导数并令它等于零,再把所得方程除以 $2\hbar_1\hbar_2$，得到

$$(a_1y_{\bar{x}_1})_{x_1}+(a_2y_{\bar{x}_2})_{x_2}=-f(x),\qquad x\in\omega. \tag{16}$$

我们构造了方程(1)的差分逼近. 这个逼近式与前面在§2中构造的逼近式(2)—(3)是一样的.

设 $x\in\gamma$, $x_1=0$, $x_2\neq 0, l_2$; 我们选取了矩形左边界上的点，但不是矩形的任一顶点. 进行前面所述的计算并将所得方程除以 $2\hbar_2$，得到

$$a_1^{(+1_1)}y_{x_1}+\frac{h_1}{2}(a_2y_{\bar{x}_2})_{x_2}=\kappa_{-1}y-g_{-1}-\frac{h_1}{2}f,$$

$$x_1=0,\ x_2\neq 0,\ l_2. \tag{17}$$

这是边界条件(8)中左边界条件的逼近式. 矩形其他各边上的边界条件可以类似地逼近.

最后,设 $x\in\gamma$, $x_1=x_2=0$. 经过计算可得

$$\frac{h_2}{h_1+h_2}a_1^{(+1_1)}y_{x_1}+\frac{h_1}{h_1+h_2}a_2^{(+1_2)}y_{x_2}$$
$$=\frac{h_2\kappa_{-1}+h_1\kappa_{-2}}{h_1+h_2}y-\frac{h_2g_{-1}+h_1g_{-2}}{h_1+h_2}$$
$$-\frac{h_1h_2}{2(h_1+h_2)}f,\qquad x_1=x_2=0. \tag{18}$$

在矩形其他顶点上也可写出类似的方程．方程(18)可以看成是在 $x_1=0$ 和 $x_2=0$ 的边界条件(8)的线性组合的差分逼近．形如(18)的方程是使方程组(16)，(17)成为闭合所不可缺少的．

估计方程(17)的逼近误差

$$\psi=\left[a_1(h_1,x_2)u_{x_1}+\frac{h_1}{2}(a_2u_{\bar{x}_2})_{x_2}-\kappa_{-1}u+g_{-1}\right.$$
$$\left.+\frac{h_1}{2}f\right]\bigg|_{x_1=0}=\left[k_1\frac{\partial u}{\partial x_1}+\frac{h_1}{2}\frac{\partial}{\partial x_1}\right.$$
$$\times\left(k_1\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)+\frac{h_1}{2}\frac{\partial}{\partial x_2}\left(k_2\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)$$
$$\left.-\kappa_{-1}u+g_{-1}+\frac{h_1}{2}f\right]+O(h_1^2+h_1h_2^2).$$

注意到方程 (1) 和边界条件 (8)，由此可得 $\psi(0,x_2)=O(|h|^2)$． 类似地可以证明，方程 (18) 也具有逼近误差 $O(|h|^2)$．

我们来讨论方程 (1) 的其他边界条件．设在矩形 G 中求方程 (1) 的解，在矩形边界上满足 § 1 中形如(23)，(27)的边界条件．

详细一点，设

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(k_1\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(k_2\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)=-f(x),\qquad x\in G, \tag{1}$$

$$k_\alpha\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}+\frac{\partial}{\partial x_\beta}\left(\sigma_{-\alpha}(x_\beta)\frac{\partial u}{\partial x_\beta}\right)=\kappa_{-\alpha}u-g_{-\alpha}(x_\beta),\ x_\alpha=0,$$
$$-k_\alpha\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}+\frac{\partial}{\partial x_\beta}\left(\sigma_{+\alpha}(x_\beta)\frac{\partial u}{\partial x_\beta}\right)=\kappa_{+\alpha}u-g_{+\alpha}(x_\beta),\ x_\alpha=l_\alpha,$$
$$\alpha,\beta=1,2,\ \alpha\neq\beta, \tag{19}$$

$$\left[\sigma_{-1}\frac{\partial u}{\partial x_2}+\sigma_{-2}\frac{\partial u}{\partial x_1}\right]\Bigg|_{\substack{x_1=0\\x_2=0}}=0,\quad\left[\sigma_{+1}\frac{\partial u}{\partial x_2}+\sigma_{+2}\frac{\partial u}{\partial x_1}\right]\Bigg|_{\substack{x_1=l_1\\x_2=l_2}}=0,$$

$$\left[\sigma_{-1}\frac{\partial u}{\partial x_2}-\sigma_{+2}\frac{\partial u}{\partial x_1}\right]\Bigg|_{\substack{x_1=0\\x_2=l_2}}=0,\quad\left[\sigma_{+1}\frac{\partial u}{\partial x_2}-\sigma_{-2}\frac{\partial u}{\partial x_1}\right]\Bigg|_{\substack{x_1=l_1\\x_2=0}}=0. \tag{20}$$

求问题(1),(19),(20)的解等价于找一个元 $u(x_1, x_2)$ 使如下的泛函达到极小值:

$$J(v)=\int_G\left[k_1(x)\left(\frac{\partial v}{\partial x_1}\right)^2+k_2(x)\left(\frac{\partial v}{\partial x_2}\right)^2-2f(x)v\right]dx$$

$$+\sum_{\alpha=1}^{2}\int_0^{l_\beta}\left\{\left[\sigma_{-\alpha}\left(\frac{\partial v}{\partial x_\beta}\right)^2+\kappa_{-\alpha}v^2-2g_{-\alpha}v\right]\Bigg|_{x_\alpha=0}\right.$$

$$\left.+\left[\sigma_{+\alpha}\left(\frac{\partial v}{\partial x_\beta}\right)^2+\kappa_{+\alpha}v^2-2g_{+\alpha}v\right]\Bigg|_{x_\alpha=l_\alpha}\right\}dx_\beta. \tag{21}$$

这个泛函与泛函(9)不同之处仅在于沿边界积分中有一附加项 $\sigma_\pm\left(\frac{\partial v}{\partial x_\beta}\right)^2$.

如同构造问题(1),(8)的差分格式那样,我们把积分换成适当的求积公式而把导数换成差商,这样就在网格 $\bar{\omega}$ 上逼近了泛函(21).在(21)中代入近似式

$$\sum_{\alpha=1}^{2}\int_0^{l_\beta}\left[\sigma_{-\alpha}\left(\frac{\partial v}{\partial x_\beta}\right)^2\Bigg|_{x_\alpha=0}+\sigma_{+\alpha}\left(\frac{\partial v}{\partial x_\beta}\right)^2\Bigg|_{x_\alpha=l_\alpha}\right]$$

$$\sim\sum_{\alpha=1}^{2}\sum_{\omega_\beta^+}\left[\bar{\sigma}_{-\alpha}v_{\bar{x}_\beta}^2|_{x_\alpha=0}+\bar{\sigma}_{+\alpha}v_{\bar{x}_\beta}^2|_{x_\alpha=l_\alpha}\right]h_\beta,$$

这里 $\bar{\sigma}_{\pm\alpha}=\sigma_{\pm\alpha}(x_\beta-h_\beta/2)$, 由(10)—(14)可得

$$J_h(v)=\sum_{\omega_1^+\times\bar{\omega}_2}a_1v_{\bar{x}_1}^2h_1\hbar_2+\sum_{\bar{\omega}_1\times\omega_2^+}a_2v_{\bar{x}_2}^2\hbar_1h_2-2\sum_{\bar{\omega}_1\times\bar{\omega}_2}fv\hbar_1\hbar_2$$

$$+\sum_{\alpha=1}^{2}\left\{\sum_{\bar{\omega}_\beta}\left[(\kappa_{-\alpha}v^2-2g_{-\alpha}v)|_{x_\alpha=0}+(\kappa_{+\alpha}v^2\right.\right.$$

$$\left.-2g_{+\alpha}v)|_{x_\alpha=l_\alpha}\right]\hbar_\beta+\sum_{\omega_\beta^+}\left[\bar{\sigma}_{-\alpha}v_{\bar{x}_\beta}^2|_{x_\alpha=0}\right.$$

$$+ \bar{\partial}_{+\alpha} v^2_{\bar{x}_\beta} \big|_{x_\alpha = l_\alpha} \big] h_\beta \Big\}.$$

令 $J_h(v)$ 对 $v(x)$ 的导数等于零就得到方程(1)和边界条件(19),(20)的逼近式.

我们来写出边界条件(19),(20)的逼近式.设 $x \in \gamma$, $x_1=0$, $x_2 \neq 0, l_2$, 这时

$$a_1^{(+1_1)} y_{x_1} + \left[\left(\bar{\sigma}_{-1} + \frac{h_1}{2} a_2\right) y_{\bar{x}_2}\right]_{x_2}$$

$$= \kappa_{-1} y - g_{-1} - \frac{h_1}{2} f, \quad x_1 = 0, \quad x_2 \neq 0, l_2. \tag{22}$$

如果 $x_1 = x_2 = 0$, 则

$$\left(\bar{\sigma}_{-2}^{(+1_1)} + \frac{h_2}{2} a_1^{(+1_1)}\right) y_{x_1} + \left(\bar{\sigma}_{-1}^{(+1_2)} + \frac{h_1}{2} a_2^{(+1_2)}\right) y_{x_2}$$

$$= \frac{h_2}{2} \kappa_{-1} y + \frac{h_1}{2} \kappa_{-2} y - \frac{h_2}{2} g_{-1} - \frac{h_1}{2} g_{-2}$$

$$- \frac{h_1 h_2}{4} f, \quad x_1 = x_2 = 0. \tag{23}$$

类似地可写出边界 γ 的其他部分的边界条件.

利用泰勒公式展开不难验证,在问题(1),(19),(20)的解和系数充分光滑的情况下,边界条件(22),(23)的逼近误差为 $O(|h|^2)$.

3. 含混合导数的方程的第三类边界条件的逼近. 我们现在讨论 § 2 中方程 (10) 的边界条件的逼近. 假设在矩形 $G=\{x=(x_1, x_2) | 0 \leqslant x_\alpha \leqslant l_\alpha, \alpha=1, 2\}$ 中求解 § 2 方程(10), 在矩形边界上给出 § 1 中的边界条件 (18). 把所讨论的问题详细写出来,即

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_{\alpha\beta} \frac{\partial u}{\partial x_\beta}\right) = -f(x), \qquad x \in G, \tag{24}$$

$$\begin{aligned} & k_{\alpha\alpha} \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} + k_{\alpha\beta} \frac{\partial u}{\partial x_\beta} = \kappa_{-\alpha} u - g_{-\alpha}, \quad x_\alpha = 0, \quad \alpha \neq \beta, \\ & -k_{\alpha\alpha} \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} - k_{\alpha\beta} \frac{\partial u}{\partial x_\beta} = \kappa_{+\alpha} u - g_{+\alpha}, \quad x_\alpha = l_\alpha, \quad \alpha \neq \beta. \end{aligned} \tag{25}$$

假设方程(24)是椭圆型的，因此它的系数满足§1的条件(7). 我们不假设问题(24)，(25)是自共轭的，亦即一般说来可以认为 $k_{12}(x) \neq k_{21}(x)$.

我们用逼近积分恒等式的方法(参看第二章§3)来构造问题(24)，(25)的差分格式.

我们提醒一下，函数 $u(x)\in W_2^1(G)$ 称为问题(24)，(25)的广义解，如果它对任意函数 $v(x)\in W_2^1(G)$ 满足积分恒等式

$$\int_0^{l_1}\int_0^{l_2}\left[\sum_{\alpha,\beta=1}^{2} k_{\alpha\beta}\frac{\partial u}{\partial x_\beta}\frac{\partial v}{\partial x_\alpha} - fv\right]dx_1dx_2$$

$$+\int_0^{l_1}[\kappa_{-2}uv|_{x_2=0} + \kappa_{+2}uv|_{x_2=l_2} - g_{-2}v|_{x_2=0}$$

$$- g_{+2}v|_{x_2=l_2}]dx_1$$

$$+\int_0^{l_2}[\kappa_{-1}uv|_{x_1=0} + \kappa_{+1}uv|_{x_1=l_1} - g_{-1}v|_{x_1=0}$$

$$- g_{+1}v|_{x_1=l_1}]dx_2 = 0. \tag{26}$$

将积分用求积公式代替，导数用差商代替，这样我们可用一个求和恒等式去逼近积分恒等式(26). 边界上的积分换成梯形求积公式，函数 fv 的积分用梯形公式，函数 $k_{\alpha\beta}\dfrac{\partial u}{\partial x_\beta}\dfrac{\partial v}{\partial x_\alpha}$ 的积分用各种右矩形公式和左矩形公式的线性组合，确切地说

$$\iint_G k_{\alpha\beta}\frac{\partial u}{\partial x_\beta}\frac{\partial v}{\partial x_\alpha}dx_1dx_2$$

$$\sim \frac{1}{4}\left\{\sum_{\omega_1^+\times\omega_2^+} k_{\alpha\beta}\frac{\partial u}{\partial x_\beta}\frac{\partial v}{\partial x_\alpha}h_1h_2\right.$$

$$+\sum_{{}^+\omega_1\times{}^+\omega_2} k_{\alpha\beta}\frac{\partial u}{\partial x_\beta}\frac{\partial v}{\partial x_\alpha}h_1h_2$$

$$+\sum_{{}^+\omega_1\times\omega_2^+} k_{\alpha\beta}\frac{\partial u}{\partial x_\beta}\frac{\partial v}{\partial x_\alpha}h_1h_2$$

$$+\sum_{\omega_1^+\times^+\omega_2} k_{\alpha\beta}\frac{\partial u}{\partial x_\beta}\frac{\partial v}{\partial x_\alpha}h_1h_2\Big\}.$$

再把这个式子中的导数换成相应的差商.

作出这些逼近以后，积分恒等式(26)变成以下求和恒等式:

$$\frac{1}{4}\sum_{\alpha,\beta=1}^{2}\Big[\sum_{\omega_1^+\times\omega_2^+} k_{\alpha\beta}u_{\bar{x}_\beta}v_{\bar{x}_\alpha}+\sum_{^+\omega_1\times^+\omega_2} k_{\alpha\beta}u_{x_\beta}v_{x_\alpha}\Big]h_1h_2$$

$$+\frac{1}{4}\sum_{^+\omega_1\times\omega_2^+}[k_{11}u_{x_1}v_{x_1}+k_{12}u_{\bar{x}_2}v_{x_1}+k_{21}u_{x_1}v_{\bar{x}_2}$$

$$+k_{22}u_{\bar{x}_2}v_{\bar{x}_2}]h_1h_2+\frac{1}{4}\sum_{\omega_1^+\times^+\omega_2}[k_{11}u_{\bar{x}_1}v_{\bar{x}_1}+k_{12}u_{x_2}v_{\bar{x}_1}$$

$$+k_{21}u_{\bar{x}_1}v_{x_2}+k_{22}u_{x_2}v_{x_2}]h_1h_2-\sum_{\bar{\omega}_1\times\bar{\omega}_2} fv\hbar_1\hbar_2$$

$$+\sum_{\bar{\omega}_1}[(\kappa_{-2}u-g_{-2})v|_{x_2=0}+(\kappa_{+2}u-g_{+2})v|_{x_2=l_2}]\hbar_1$$

$$+\sum_{\bar{\omega}_2}[(\kappa_{-1}u-g_{-1})v|_{x_1=0}+(\kappa_{+1}u$$

$$-g_{+1})v|_{x_1=l_1}]\hbar_2=0. \qquad (27)$$

在 $\bar{\omega}$ 上定义的网格函数 $y(x)$ 称为问题(24)，(25)的近似解，如果它对定义在同一 $\bar{\omega}$ 上的任意网格函数 $v(x)$ 都满足求和恒等式 (27). 选取网格函数 v，它在网格 $\bar{\omega}$ 的某个节点上的值为 1 而在其它节点上的值为 0，我们就得到 v 不等于 0 的那个节点上的差分方程. 用这种方法逐个选取 $\bar{\omega}$ 的所有节点，我们得到逼近问题(24)，(25)的网格问题. 这时在网格 ω 的内节点上，我们得到(24)的逼近式，它与前面§2中所构造的这个方程的逼近式(12)是一样的. 对于边界节点 γ，得到边界条件(25)的逼近. 例如对 $x_1=0$, $x_2\neq 0$, l_2, 差分方程的形式为

$$\frac{k_{11}+k_{11}^{(+1_1)}}{2} y_{x_1} + k_{12} y_{\mathring{x}_2} + \frac{h_1}{2}\left\{\left(\frac{k_{22}+k_{22}^{(-1_2)}}{2} y_{\bar{x}_2}\right)_{x_2}\right.$$

$$\left. + [(k_{21} y_{x_1})_{\mathring{x}_2} + (k_{12} y_{\mathring{x}_2})_{x_1}]\right\}$$

$$= \kappa_{-1} y - g_{-1} - \frac{h_1}{2} f, \quad x_1 = 0; \ x_2 \neq 0, l_2, \qquad (28)$$

而对 $x_1 = x_2 = 0$ 为

$$\frac{h_2}{h_1+h_2}\left(\frac{k_{11}+k_{11}^{(+1_1)}}{2} y_{x_1} + k_{12} y_{x_2} - \kappa_{-1} y + g_{-1}\right)$$

$$+ \frac{h_1}{h_1+h_2}\left(\frac{k_{22}+k_{22}^{(+1_2)}}{2} y_{x_2} + k_{21} y_{x_1} - \kappa_{-2} y + g_{-2}\right)$$

$$+ \frac{h_1 h_2}{2(h_1+h_2)} [(k_{12} y_{x_2})_{x_1} + (k_{21} y_{x_1})_{x_2} + f] = 0,$$

$$x_1 = x_2 = 0. \qquad (29)$$

边界 γ 上其它节点的方程可以类似地写出.

我们指出,当 $k_{12} = k_{21} = 0$ 时,除了计算系数的方法之外,方程(28)和方程(17)相同,而方程(29)和方程(18)相同.

不难验证,如果问题(24),(25)的解和系数足够光滑,则方程(28)以误差 $O(h_1^2 + h_2^2)$ 逼近边界条件(25),而方程(29)在角点上只以误差 $O(h_1 + h_2)$ 逼近边界条件的线性组合.

我们更详细地研究方程(29)的逼近误差. 利用泰勒公式得到

$$\psi(0,0) = \frac{h_2}{h_1+h_2}\left[k_{11}\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{h_1}{2}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(k_{11}\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)\right.$$

$$\left. + k_{12}\frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{h_2}{2} k_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \kappa_{-1} u + g_{-1}\right]$$

$$+ \frac{h_1}{h_1+h_2}\left[k_{22}\frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{h_2}{2}\frac{\partial}{\partial x_2}\left(k_{22}\frac{\partial u}{\partial x_2}\right) + k_{21}\frac{\partial u}{\partial x_1}\right.$$

$$\left. + \frac{h_1}{2} k_{21}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \kappa_{-2} u + g_{-2}\right] + \frac{h_1 h_2}{2(h_1+h_2)}$$

$$\times\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(k_{12}\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(k_{21}\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)+f\right]$$

$$+O(h_1^2+h_2^2).$$

注意 u 是问题(24),(25)的解. 于是

$$\psi(0,0)=\frac{h_2^2}{2(h_1+h_2)}k_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\frac{h_1^2}{2(h_1+h_2)}k_{21}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+O(h_1^2+h_2^2). \tag{30}$$

由此可见,即使数 $k_{12}(0,0)$ 和 $k_{21}(0,0)$ 中有一个不为 0 ,则在点 $(0,0)$ 的逼近误差是 $O(h_1+h_2)$.

我们说明,如何利用 (29) 中 $y(0,0)$ 的系数的改变可以构造出逼近误差为 $O(h_1^2+h_2^2)$ 的方程. 对此我们补充假设

$$k_{12}(0,0)+k_{21}(0,0)\neq 0. \tag{31}$$

改变一下逼近误差表达式(30),从中消去导数 $\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}u(0,0)$ 和 $\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}u(0,0)$,根据(25),当 $x_1=x_2=0$ 时,边界条件的形式为

$$\begin{aligned}&k_{11}\frac{\partial u}{\partial x_1}+k_{12}\frac{\partial u}{\partial x_2}=\kappa_{-1}u-g_{-1},\\&k_{21}\frac{\partial u}{\partial x_1}+k_{22}\frac{\partial u}{\partial x_2}=\kappa_{-2}u-g_{-2}.\end{aligned} \tag{32}$$

由此求得,当 $x_1=x_2=0$ 时

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x_2}&=[k_{11}(\kappa_{-2}u-g_{-2})-k_{21}(\kappa_{-1}u-g_{-1})]/\\&\qquad(k_{11}k_{22}-k_{12}k_{21}),\\\frac{\partial u}{\partial x_1}&=[k_{22}(\kappa_{-1}u-g_{-1})-k_{12}(\kappa_{-2}u-g_{-2})]/\\&\qquad(k_{11}k_{22}-k_{12}k_{21}).\end{aligned} \tag{33}$$

因为根据 §1 中方程(24)的椭圆性条件(7)有

$$k_{11}k_{22}-k_{12}k_{21}>(k_{12}-k_{21})^2/4, \tag{34}$$

所以这个公式的分母不等于 0 .

令条件(25)中第一式的 $\alpha=1$, 对 x_2 微分, 再令 $\alpha=2$, 对 x_1 微分有

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\left(k_{11}\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(k_{12}\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)=\frac{\partial}{\partial x_2}(\kappa_{-1}u-g_{-1}),$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(k_{21}\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)+\frac{\partial}{\partial x_1}\left(k_{22}\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)=\frac{\partial}{\partial x_1}(\kappa_{-2}u-g_{-2}).$$

把这些方程与方程(24)在 $x_1=x_2=0$ 上联立起来,我们得到在点 (0, 0) 上二阶导数 $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}$ 和 $\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}$ 的方程组。系数行列式等于

$$-(k_{12}+k_{21})(k_{11}k_{22}-k_{12}k_{21})\big|_{x_1=x_2=0},$$

根据(31),(34)它不为 0 . 这就可以在点 (0, 0) 上把待求解的二阶导数用这一点的解本身和它的一阶导数表示. 但根据(33),在点 (0, 0) 上的一阶导数可以用解本身表示,因此二阶导数可以表示成形式

$$k_{\beta\alpha}\frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2}(0,0)=\mu_\alpha u(0,0)-\nu_\alpha, \qquad \beta\neq\alpha.$$

把这些导数值代入(30),

$$\phi(0,0)=\frac{h_2^2}{2(h_1+h_2)}(\mu_2 u(0,0)-\nu_2)$$

$$+\frac{h_1^2}{2(h_1+h_2)}(\mu_1 u(0,0)-\nu_1)+O(h_1^2+h_2^2).$$

由此得知,差分方程

$$\frac{h_2}{h_1+h_2}\left(\frac{k_{11}+k_{11}^{(+1_1)}}{2}y_{x_1}+k_{12}y_{x_2}-\kappa_1^* y+g_{-1}^*\right)$$

$$+\frac{h_1}{h_1+h_2}\left(\frac{k_{22}+k_{22}^{(+1_2)}}{2}y_{x_2}+k_{21}y_{x_1}-\kappa_{-2}^* y+g_{-2}^*\right)$$

$$+\frac{h_1h_2}{2(h_1+h_2)}[(k_{12}y_{x_2})_{x_1}+(k_{21}y_{x_1})_{x_2}+f]=0$$

的逼近误差为 $O(h_1^2+h_2^2)$，其中

$$\kappa_{-\alpha}^{*}=\kappa_{-\alpha}+\frac{h_\beta}{2}\mu_\beta,\quad g_{-\alpha}^{*}=g_{-\alpha}+\frac{h_\beta}{2}\nu_\beta,\qquad \beta\neq\alpha.$$

如果网格 ϖ 是非均匀的，则用这种逼近积分恒等式的方法可以构造类似于条件(28)和(29)的式子，

$$\begin{aligned}&\frac{k_{\alpha\alpha}+k_{\alpha\alpha}^{(+1\alpha)}}{2}y_{x_\alpha}+k_{\alpha\beta}\frac{y_{\hat{x}_\beta}+y_{\check{x}_\beta}}{2}+\frac{h_\alpha^+}{4}[(k_{\beta\beta}y_{x_\beta})_{\hat{x}_\beta}\\&\quad+(k_{\beta\beta}y_{x_\beta})_{\check{x}_\beta}+(k_{\beta\alpha}y_{x_\alpha})_{\hat{x}_\beta}+(k_{\alpha\beta}y_{\check{x}_\beta})_{x_\alpha}\\&\quad+(k_{\beta\alpha}y_{x_\alpha})_{\check{x}_\beta}+(k_{\alpha\beta}y_{\hat{x}_\beta})_{x_\alpha}]\\&=\kappa_{-\alpha}y-g_{-\alpha}-\frac{h_\alpha^+}{2}f,x_\alpha=0,\ x_\beta\neq 0,l_\beta,\end{aligned}\tag{35}$$

$$\begin{aligned}&\frac{h_2^+}{h_1^++h_2^+}\left(\frac{k_{11}+k_{11}^{(+11)}}{2}y_{x_1}+k_{12}y_{x_2}-\kappa_{-1}y+g_{-1}\right)\\&+\frac{h_1^+}{h_1^++h_2^+}\left(\frac{k_{22}+k_{22}^{(+12)}}{2}y_{x_2}+k_{21}y_{x_1}-\kappa_{-2}y+g_{-2}\right)\\&+\frac{h_1^+h_2^+}{2(h_1^++h_2^+)}[(k_{12}y_{x_2})_{x_1}+(k_{21}y_{x_1})_{x_2}+f]=0,\\&\qquad x_1=x_2=0.\end{aligned}\tag{36}$$

4. 诺依曼问题的高阶逼近差分格式. 在矩形 $G=\{x=(x_1,x_2)|0<x_\alpha<l_\alpha\ \alpha=1,2\}$ 中讨论泊松方程的第二边值问题(诺依曼问题)：

$$\begin{aligned}&\Delta u\equiv\frac{\partial^2u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2u}{\partial x_2^2}=-f(x),\qquad x\in G,\\&\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}=-g_{-\alpha}(x_\beta),\qquad x_\alpha=0,\end{aligned}\tag{37}$$

$$-\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}=-g_{+\alpha}(x_\beta),\ x_\alpha=l_\alpha,\ \beta\neq\alpha.\tag{38}$$

问题(37)，(38)是我们已经讨论过的问题 (1)，(8) 的特殊情况，令后者中的 $k_1=k_2=1$，$\kappa_{\pm\alpha}=0$ 即可得到.

我们将逼近问题(1),(8)的差分格式(16)—(18)改写一下,使之应用于现在所讨论的问题(37),(38).

引入记号

$$\bar{\Lambda}_\alpha v = \begin{cases} \dfrac{2}{h_\alpha} v_{x_\alpha}, & x_\alpha = 0, \\ v_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}, & x_\alpha \neq 0,\ l_\alpha, \\ -\dfrac{2}{h_\alpha} v_{\bar{x}_\alpha}, & x_\alpha = l_\alpha. \end{cases} \tag{39}$$

这时逼近于问题(37),(38)的差分格式写成

$$(\bar{\Lambda}_1 + \bar{\Lambda}_2) y = -\varphi(x),$$

其中

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(x), & x \in \omega, \\ f(x) + \dfrac{2}{h_\alpha} g_{\mp\alpha}(x_\beta), & x \in \bar{\omega},\ x_\alpha = 0, l_\alpha; \\ & x_\beta \neq 0,\ l_\beta, \\ f(x) + \dfrac{2}{h_1} g_{\mp 1} + \dfrac{2}{h_2} g_{\mp 2}, & x \in \bar{\omega}, \\ & x_1 = 0,\ l_1;\ x_2 = 0,\ l_2. \end{cases}$$

在第三章§1中曾经建立了差分方程(6),(7)

$$\Lambda' y = \Lambda_1 y + \Lambda_2 y + \frac{h_1^2 + h_2^2}{12} \Lambda_1 \Lambda_2 y = -\varphi'(x),$$

$$x \in \omega, \tag{40}$$

其中

$$\Lambda_\alpha v = v_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}, \quad \varphi' = f + \frac{1}{12}\left(h_1^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + h_2^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\right),$$

它以误差 $O(h_1^4 + h_2^4)$ 逼近泊松方程(37).

我们来构造以误差 $O(h_1^4 + h_2^4)$ 逼近问题(37),(38)的差分格式. 与(40)相仿,我们将寻找如下形式的差分格式

$$\bar{\Lambda}'y \equiv \bar{\Lambda}_1 y + \bar{\Lambda}_2 y + \frac{h_1^2 + h_2^2}{12} \bar{\Lambda}_1 \bar{\Lambda}_2 y = -\Phi'(x),$$

$$x \in \bar{\omega}, \tag{41}$$

其中对 $x \in \bar{\omega}$ 的右端 $\Phi'(x)$ 应选得使逼近误差具有所需要的阶.

如果对 $x \in \omega$ 令 $\Phi' = \varphi'$, 则方程(41)与方程(40)相同，因此将以误差 $O(h_1^4 + h_2^4)$ 逼近 (37).

从而剩下要确定边界 ν 上的 Φ'. 首先讨论 $x_1 = 0$ 及 $x_2 \neq 0, l_2$ 时的方程(41). 注意到(39),把方程(41)改写成以下形式

$$y_{x_1} + \frac{h_1}{2} y_{\bar{x}_2 x_2} + \frac{h_1^2 + h_2^2}{12} y_{x_1 \bar{x}_2 x_2} + \frac{h_1}{2} \Phi' = 0. \tag{42}$$

计算这个方程的逼近误差

$$\begin{aligned}
\psi &= u_{x_1} + \frac{h_1}{2} u_{\bar{x}_2 x_2} + \frac{h_1^2 + h_2^2}{12} u_{x_1 \bar{x}_2 x_2} + \frac{h_1}{2} \Phi' \\
&= \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{h_1}{2} \Delta u + \frac{h_1}{2} \left(\frac{h_1^2}{12} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{h_2^2}{12} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) \Delta u \\
&\quad + \frac{h_1^2}{6} \frac{\partial}{\partial x_1} \Delta u + \frac{h_2^2 - h_1^2}{12} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \frac{\partial u}{\partial x_1} \\
&\quad + \frac{h_1}{2} \Phi' + O(h_1^4 + h_2^4).
\end{aligned}$$

利用方程(37)和边界条件(38),立即求得

$$\begin{aligned}
\psi = &-g_{-1} - \frac{h_1}{2} f - \frac{h_1}{2} \left(\frac{h_1^2}{12} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{h_2^2}{12} \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \right) \\
&- \frac{h_1^2}{6} \frac{\partial f}{\partial x_1} - \frac{h_2^2 - h_1^2}{12} \frac{\partial^2 g_{-1}}{\partial x_2^2} + \frac{h_1}{2} \Phi' + O(h_1^4 + h_2^4).
\end{aligned}$$

因此,要使方程(42)的逼近误差是 $O(h_1^4 + h_2^4)$, 只需假设当 $x_1 = 0, x_2 \neq 0, l_2$ 时

$$\Phi' = f + \frac{h_1^2}{12}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{h_2^2}{12}\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}$$

$$+ \frac{2}{h_1}\left(g_{-1} + \frac{h_1^2}{6}\frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{h_2^2 - h_1^2}{12}\frac{\partial^2 g_{-1}}{\partial x_2^2}\right)$$

$$= \varphi' + \frac{2}{h_1}\left(g_{-1} + \frac{h_1^2}{6}\frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{h_2^2 - h_1^2}{12}\frac{\partial^2 g_{-1}}{\partial x_2^2}\right).$$

现在来确定当 $x_1 = x_2 = 0$ 时 Φ' 的形式. 注意到(39), 把(41)改写成形式

$$\frac{h_2}{h_1 + h_2} y_{x_1} + \frac{h_1}{h_1 + h_2} y_{x_2} + \frac{1}{6}\frac{h_1^2 + h_2^2}{h_1 + h_2} y_{x_1 x_2}$$

$$+ \frac{h_1 h_2}{2(h_1 + h_2)}\Phi' = 0.$$

计算这个方程的逼近误差,

$$\psi(0, 0) = \frac{h_2}{h_1 + h_2} u_{x_1} + \frac{h_1}{h_1 + h_2} u_{x_2} + \frac{1}{6}\frac{h_1^2 + h_2^2}{h_1 + h_2} u_{x_1 x_2}$$

$$+ \frac{h_1 h_2}{2(h_1 + h_2)}\Phi' = \frac{h_1 h_2}{2(h_1 + h_2)}\left\{\frac{2}{h_1}\frac{\partial u}{\partial x_1}\right.$$

$$+ \frac{2}{h_2}\frac{\partial u}{\partial x_2} + \Delta u + \left(\frac{h_1^2}{12}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{h_2^2}{12}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right)\Delta u$$

$$+ \frac{h_1}{3}\frac{\partial}{\partial x_1}\Delta u + \frac{h_2^2 - h_1^2}{6h_1}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\frac{\partial u}{\partial x_1}$$

$$+ \frac{h_2}{3}\frac{\partial}{\partial x_2}\Delta u + \frac{h_1^2 - h_2^2}{6h_2}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\frac{\partial u}{\partial x_2}$$

$$+ \frac{h_1(h_1^2 + h_2^2)}{18 h_2}\frac{\partial^3}{\partial x_1^3}\frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{h_2(h_1^2 + h_2^2)}{18 h_1}$$

$$\times \frac{\partial^3}{\partial x_2^3}\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{h_1^2 + h_2^2}{3h_1 h_2}\left(\sigma\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial u}{\partial x_1}\right.$$

$$\left.\left. + (1 - \sigma)\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial u}{\partial x_2}\right) + \Phi' + O(h_1^4 + h_2^4)\right\}.$$

为了改变逼近误差表达式, 我们利用方程 (37) 和边界条件

(38),

$$
\begin{aligned}
\psi(0,0)=-\frac{h_1h_2}{2(h_1+h_2)}\Big\{\varphi'&+\frac{2}{h_1}\Big(g_{-1}+\frac{h_1^2}{6}\frac{\partial f}{\partial x_1}\\
&+\frac{h_2^2-h_1^2}{6}\frac{\partial^3 g_{-1}}{\partial x_2^2}\Big)+\frac{2}{h_2}\Big(g_{-2}+\frac{h_2^2}{6}\frac{\partial f}{\partial x_2}\\
&+\frac{h_1^2-h_2^2}{12}\frac{\partial^2 g_{-2}}{\partial x_1^2}\Big)+\frac{4}{h_1h_2}\Big(\frac{h_2^2(h_1^2+h_2^2)}{72}\\
&\times\frac{\partial^3 g_{-1}}{\partial x_2^3}+\frac{h_1^2(h_1^2+h_2^2)}{72}\cdot\frac{\partial^3 g_{-2}}{\partial x_1^3}\\
&+\frac{h_1^2+h_2^2}{12}\sigma\frac{\partial g_{-1}}{\partial x_2}+\frac{h_1^2+h_2^2}{12}(1-\sigma)\\
&\times\frac{\partial g_{-2}}{\partial x_1}\Big)-\Phi'+O(h_1^4+h_2^4)\Big\}.
\end{aligned}
$$

由逼近误差的形式可知,如果假设当 $x_1=x_2=0$ 时,

$$
\begin{aligned}
\Phi'(0,0)=\varphi'(0,0)&+\frac{2}{h_1}\Big[g_{-1}+\frac{h_1}{6}\frac{\partial f}{\partial x_1}+\frac{h_2^2-h_1^2}{12}\\
&\times\frac{\partial^2 g_{-1}}{\partial x_2^2}\Big]+\frac{2}{h_2}\Big[g_{-2}+\frac{h_2^2}{6}\frac{\partial f}{\partial x_2}\\
&+\frac{h_1^2-h_2^2}{12}\frac{\partial^2 g_{-2}}{\partial x_1^2}\Big]+\frac{4}{h_1h_2}\Big[\frac{h_1^2+h_2^2}{12}\\
&\times\sigma\frac{\partial g_{-1}}{\partial x_2}+\frac{h_2^2(h_1^2+h_2^2)}{72}\frac{\partial^3 g_{-1}}{\partial x_2^3}+\frac{h_1^2+h_2^2}{12}\\
&\times(1-\sigma)\frac{\partial g_{-2}}{\partial x_1}+\frac{h_1^2(h_1^2+h_2^2)}{72}\frac{\partial^3 g_{-2}}{\partial x_1^3}\Big],
\end{aligned}
$$

则逼近误差的阶为 $O(h_1^4+h_2^4)$, 式中 σ 是任意参数,它的合理选择,通过研究格式(41)的收敛速度就会清楚.

对边界 ν 的其它区段,右端 Φ' 可类似确定.

5. 曲线边界上第三类边界条件的逼近(协调网格). 到目前为止我们已构造了一些含导数的边界条件的逼近，但所讨论的这些边界段都是直线并且平行于一个坐标轴. 本段和

下一段我们来研究更一般的情况，边界段或者是曲线，或者是不与任一坐标轴平行的直线.

设在某个区域 G 中要求方程(37)的解，在 G 的一段边界 Γ_0 上满足条件

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \kappa u - g(x), \qquad x \in \Gamma_0, \tag{43}$$

其中 n 是 Γ_0 的内法线方向. 设 Γ_0 由方程

$$x_\alpha = \mu_\alpha(t) \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_1, \ \alpha = 1, 2 \tag{44}$$

给定. 为确定起见，假设函数 $\mu_\alpha(t)$ 的导数 $\mu'_\alpha(t)$ 为正且满足条件

$$0 < m\mu'_1(t) \leqslant \mu'_2(t) \leqslant M\mu'_1(t) < \infty, \tag{45}$$

而区域位于边界右侧(图 21).

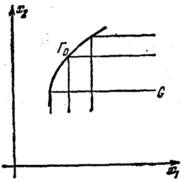


图 21

我们说在区域 G 中引进了协调网格(和边界段 Γ_0 协调的网格)，如果对于与条件(44)相关的值 x_α，它的节点由直线

$$x_\alpha = \mu_\alpha(t_i), \ \alpha = 1, 2, \ i = 0, \pm 1, \cdots$$

的交点给出(图 21).

我们在协调网格上构造边界条件 (43) 的逼近式. 将 (4.3) 改写成形式

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}\cos(n, x_1)+\frac{\partial u}{\partial x_2}\cos(n, x_2)=\kappa u-g(x).$$

并构造这个条件的最简单的逼近式

$$y_{x_1}\cos(n, x_1)+y_{\bar{x}_2}\cos(n, x_2)=\kappa y-g.$$

计算上述方程的逼近误差

$$\begin{aligned}\Psi&=u_{x_1}\cos(n, x_1)+u_{\bar{x}_2}\cos(n, x_2)-\kappa u+g\\&=\left[\frac{\partial u}{\partial x_1}+\frac{h_1^+}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+O((h_1^+)^2)\right]\cos(n, x_1)\\&\quad+\left[\frac{\partial u}{\partial x_2}-\frac{h_2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+O(h_2^2)\right]\cos(n, x_2)-\kappa u+g\\&=\frac{h_1^+}{2}\cos(n, x_1)\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}-\frac{h_2}{2}\cos(n, x_2)\\&\quad\times\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+O((h_1^+)^2+h_2^2).\end{aligned}$$

我们把逼近误差表达式作一改变，假定步长 h_1^+ 是给定的，而步长 h_2 由以下条件决定：

$$\frac{h_1^+}{2}\cos(n, x_1)=-\frac{h_2}{2}\cos(n, x_2)+O((h_1^+)^2+h_2^2).$$

注意，在所讨论的情况下，

$$\cos(n, x_1)=\frac{\mu_2'}{\sqrt{\mu_1'^2+\mu_2'^2}},\quad \cos(n, x_2)=-\frac{\mu_1'}{\sqrt{\mu_1'^2+\mu_2'^2}},$$

选取 h_2 的条件可以写成如下形式：

$$(h_1^+\mu_2'-h_2\mu_1')/(2\sqrt{\mu_1'^2+\mu_2'^2})=O((h_1^+)^2+h_2^2).$$

注意到(45)，我们得知，如果令

$$h_2=h_1^+\frac{\mu_2'}{\mu_1'}+O((h_1^+)^2),\tag{46}$$

则这个条件将成立.

设(46)成立. 这时考虑到(37)，逼近误差变成

$$\Psi = \frac{h_1^+}{2}\frac{\mu_2'}{\sqrt{\mu_1'^2 + \mu_2'^2}}\Delta u + O((h_1^+)^2 + h_2^2)$$

$$= -\frac{h_1^+}{2}\frac{\mu_2'}{\sqrt{\mu_1'^2 + \mu_2'^2}}f + O((h_1^+)^2 + h_2^2).$$

由此可得，差分边界条件

$$y_{x_1}\cos(n, x_1) + y_{\bar{x}_2}\cos(n, x_2)$$
$$= \kappa y - \left(g + \frac{h_1^+\mu_2'}{2\sqrt{\mu_1'^2 + \mu_2'^2}}f\right) \tag{47}$$

以误差 $O((h_1^+)^2 + h_2^2)$ 逼近条件(43).

§4. 弹性理论方程组的边值问题

本节将阐述各向同性物体在平面形变情况下弹性理论基本问题的提法. 将构造出逼近平衡方程和边界条件的差分方程. 所有讨论都是对各边平行于坐标轴的矩形进行的.

1. 弹性理论的基本平面问题. 在第一章 § 1 中指出，各向同性的均匀弹性固体在平面形变情况下的平衡方程组具有(31)的形状. 如果物体不是均匀的，而形变仍然是平面的，则根据第一章 § 1 (30) 式，这时的平衡方程为

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x_1}\left((2\mu + \lambda)\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\mu\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right) \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\lambda\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\mu\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) + F_1 = 0, \\
&\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\lambda\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\mu\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\mu\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial x_2}\left((2\mu + \lambda)\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right) + F_2 = 0.
\end{aligned} \tag{1}$$

我们提醒一下，方程组(1)中未知函数 $u_1(x)$ 和 $u_2(x)$ 分别表

示质点在坐标轴 Ox_1 和 Ox_2 方向上的位移，而 $\lambda(x) > 0$ 和 $\mu(x) > 0$ 是表征物体弹性性质的拉梅系数.

对于方程组(1)可以提出这样的问题，即求向量 $u = (u_1, u_2)$ 使其在区域边界 Γ 上取给定值(第一边值问题)

$$u_1 = g_1, \quad u_2 = g_2, \quad \text{当} \quad x \in \Gamma. \tag{2}$$

如果在区域边界上给定应力，则我们有第二边值问题. 按照第一章 § 1 的(28)，(29)和(32)，这时的边界条件为

$$\begin{aligned}
&\left[(\lambda + 2\mu)\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \lambda\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right]\cos(n, x_1) \\
&\quad + \mu\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)\cos(n, x_2) = -f_1, \\
&\mu\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)\cos(n, x_1) + \left(\lambda\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + (\lambda + 2\mu)\right. \\
&\quad \left. \times \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)\cos(n, x_2) = -f_2,
\end{aligned} \tag{3}$$

这里 n 是边界 Γ 的内法线方向.

如果在区域边界上给定位移向量在法线方向的分量和应力向量在切线方向的分量，则有第三边值问题

$$\begin{aligned}
&u_1\cos(n, x_1) + u_2\cos(n, x_2) = g, \\
&\mu\left[2\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} - \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)\cos(n, x_1)\cos(n, x_2)\right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)(\cos^2(n, x_1) - \cos^2(n, x_2))\right] \\
&= -f.
\end{aligned} \tag{4}$$

对方程组(1)常常提出混合问题，即在一部分边界上给出一种边界条件，而在另一部分上给出另一种边界条件.

当边界平行于 Ox_1 轴且区域位于其上方时，条件(3)和(4)可写为

$$\mu\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)=-f_1(x,0),$$

$$\lambda\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+(\lambda+2\mu)\frac{\partial u_2}{\partial x_2}=-f_2(x_1,0), \tag{5}$$

$$u_2=g(x_1,0),\ \mu\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)=-f(x_1,0). \tag{6}$$

2. 问题(1),(3)的差分逼近. 我们来构造逼近方程组(1)和边界条件(3)的差分格式，并设区域是各边平行于坐标轴的矩形. 我们用里兹方法来构造格式.

设 $G=\{x=(x_1,x_2)|0<x_\alpha<l_\alpha,\ \alpha=1,2\}$，$\Gamma$是$G$的边界. 不难验证,如果问题(1),(3)在$G$内的解存在，则它使下面的泛函达到极小值:

$$\begin{aligned}J(u)=W(u)&-\int_0^{l_1}\int_0^{l_2}(F_1u_1+F_2u_2)dx_1dx_2\\&-\int_0^{l_1}[f_1(x_1,0)u_1+f_1(x_1,l_2)u_1\\&+f_2(x_1,0)u_2+f_2(x_1,l_2)u_2]dx_1\\&-\int_0^{l_2}[f_1(0,x_2)u_1+f_1(l_1,x_2)u_1\\&+f_2(0,x_2)u_2+f_2(l_1,x_2)u_2]dx_2,\end{aligned} \tag{7}$$

其中

$$\begin{aligned}W(u)=\frac{1}{2}\int_0^{l_1}\int_0^{l_2}&\left\{2\mu\left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)^2\right]\right.\\&\left.+\lambda\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)^2+\mu\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}+\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)^2\right\}\\&\times dx_1dx_2\end{aligned} \tag{8}$$

是物体的弹性变形能.

使泛函(7)达到极小值的向量 $u=(u_1,u_2)$, $u_\alpha\in W_2^1(G)$ 称为问题(1),(3)的解.

根据里兹方法,用有限维子空间V逼近空间 $W_2^1(G)$，并

把使泛函 (7) 在子空间 V 中达到极小值的向量 $\bar{u}=(\bar{u}_1, \bar{u}_2)$, $\bar{u}_\alpha \in V$ 称为问题(1),(3)的近似解.

构造近似的有限维子空间的方法同我们在 § 2 中第 2 段应用布本诺夫-伽辽金方法时所做的相同. 亦即,设

$$\bar{\omega}=\{x=x_i=(x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_2)}) \mid x_\alpha^{(i_\alpha)}=i_\alpha h_\alpha,\ h_\alpha=l_\alpha/N_\alpha,$$
$$i_\alpha=0, 1, \cdots, N_\alpha;\ \alpha=1, 2\}$$

是区域 $\bar{G}$ 上的均匀矩形网格. 把区域 $\bar{G}$ 分成一些边长为 h_1 和 h_2, 顶点是网格 $\bar{\omega}$ 节点的矩形子区域. 设

$$G[i]=\{x=(x_1, x_2) \mid x_\alpha^{(i_\alpha)} \leqslant x_\alpha \leqslant x_\alpha^{(i_\alpha+1)}\}.$$

每个子区域 $G[i]$ 又用通过它的相对顶点 $(x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_2)})$, $(x_1^{(i_1+1)}, x_2^{(i_2+1)})$ 的直线分成两个三角形. 左上三角形记为 $\Delta^+[i]$, 右下三角形记为 $\Delta^-[i]$. (区域 $\bar{G}$ 划分为三角形如图 22). 将在 $\bar{G}$ 中连续且在每个三角形 $\Delta^\pm[i]$ 上为线性的函数所组成的空间取作 $W_2^1(G)$ 的子空间 V.

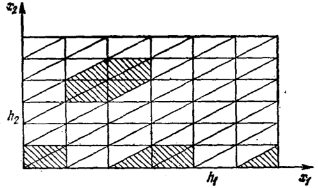


图 22

我们求问题(1),(3)的如下形式的近似解

$$\bar{u}=(\bar{u}_1(x), \bar{u}_2(x)),$$
$$\bar{u}_\alpha(x)=\sum_{i_1=0}^{N_1}\sum_{i_2=0}^{N_2} y_{\alpha i_1 i_2}\eta_{i_1 i_2}(x),\ \alpha=1, 2,\ x \in \bar{G}, \tag{9}$$

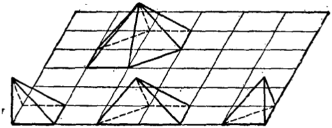


图 23

其中 $\{\eta_j(x)\}$, $j=(j_1, j_2)$ 是空间 V 的基.

为了利用(9),我们给出 V 的基. 显然,在 G 中连续、在每个三角形 $\Delta^{\pm}[i]$ 上为线性,并且只在网格 $\bar{\omega}$ 的一个节点上不为 0 的函数的全体可以取作 V 的基. 我们假定 $\eta_i(x_i)=1$,对于所取的基,(9)中系数 $y_{\alpha j}$ 就是近似解在网格 $\bar{\omega}$ 的节点上的值.

显然,每个基函数 $\eta_i(x)$ 只在图 22 中细斜线画出的一个小区域内不为零. 当 $0<i_\alpha<N_\alpha$, $\alpha=1, 2$ 时,给出坐标函数 $\eta_i(x)$ (相应于网格 $\bar{\omega}$ 的内节点的函数)的公式具有 § 2 中(16)式的形式,这里由于网格 $\bar{\omega}$ 的均匀性应取 $h_\alpha^+=h_\alpha$. 如果函数 $\eta_{i_1 i_2}$ 的一个或两个足标取值 0 或 N_α, 则它的公式可以很容易地根据 §2(16) 式写出.图 23 上画出了函数 $\eta_i(x)$在其不等于 0 的区域上的图形.

我们来求出(9)中未知参数 $y_{\alpha j}$ 应当满足的方程. 为此将(9)中的 $\bar{u}(x)$ 代入(7),(8),结果得到函数 $J(\bar{u})$, 它依赖于 $2(N_1+1)(N_2+1)$个变量 $y_{\alpha i}$.

将 $J(\bar{u})$ 对这些变量求导数并令一阶导数等于零,得到确定参数 $y_{\alpha i_1 i_2}$ 的线性代数方程组. 这个方程组形为

$$\sum_{j_1=0}^{N_1}\sum_{j_2=0}^{N_2}\sum_{\beta=1}^{2} A_{\alpha i_1 i_2}^{\beta j_1 j_2} y_{\beta j_1 j_2}=\varphi_{\alpha i_1 i_2},$$

$$i_\alpha=0, \cdots, N_\alpha, \ \alpha=1, 2, \tag{10}$$

其中

$$A_{\alpha i_1 i_2}^{\alpha j_1 j_2} = \int_0^{l_1} \int_0^{l_2} \left[(\lambda + 2\mu) \frac{\partial \eta_{j_1 j_2}}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \eta_{i_1 i_2}}{\partial x_\alpha} + \mu \frac{\partial \eta_{j_1 j_2}}{\partial x_\beta} \frac{\partial \eta_{i_1 i_2}}{\partial x_\beta} \right] dx_1 dx_2,$$

$$A_{\alpha i_1 i_2}^{\beta j_1 j_2} = \int_0^{l_1} \int_0^{l_2} \left[\lambda \frac{\partial \eta_{j_1 j_2}}{\partial x_\beta} \frac{\partial \eta_{i_1 i_2}}{\partial x_\alpha} + \mu \frac{\partial \eta_{j_1 j_2}}{\partial x_\alpha} \times \frac{\partial \eta_{i_1 i_2}}{\partial x_\beta} \right] dx_1 dx_2, \quad \alpha, \beta = 1, 2, \quad \alpha \neq \beta, \tag{11}$$

$$\varphi_{\alpha i_1 i_2} = \int_0^{l_1} \int_0^{l_2} F_\alpha \eta_{i_1 i_2} dx_1 dx_2 + \int_\Gamma f_\alpha \eta_{i_1 i_2} ds. \tag{12}$$

我们根据 § 2 中关系式 (20) 所给出的当 $h_\alpha^+ = h_\alpha$ 时导数 $\frac{\partial \eta_i}{\partial x_\alpha}$ 的形式来计算系数 $A_{\alpha i}^{\beta j}$。从 § 2 的(11)和(20)得到，当 $|i_1 - j_1| > 1$ 或 $|i_2 - j_2| > 1$ 时 $A_{\alpha i_1 i_2}^{\beta j_1 j_2} = 0$。此外，

$$A_{\alpha i_1 i_2}^{\beta i_1 - 1, i_2 + 1} = A_{\alpha i_1 i_2}^{\beta i_1 + 1, i_2 - 1} = 0.$$

因此，不等于零的只可能是如下几个系数:

$A_{\alpha i_1 i_2}^{\beta i_1 i_2}$, $A_{\alpha i_1 i_2}^{\beta i_1 + 1, i_2}$, $A_{\alpha i_1 i_2}^{\beta i_1, i_2 + 1}$, $A_{\alpha i_1 i_2}^{\beta i_1, i_2 - 1}$, $A_{\alpha i_1 i_2}^{\beta i_1 - 1, i_2 - 1}$, $A_{\alpha i_1 i_2}^{\beta i_1 + 1, i_2 + 1}$.

假设拉梅系数 λ 和 μ 是常数，首先计算当 $i_\alpha \neq 0, N_\alpha$, $\alpha = 1, 2$ 时的 $A_{\alpha i_1 i_2}^{\beta j_1 j_2}$.

$$\begin{aligned}
A_{\alpha i_1 i_2}^{\alpha i_1 i_2} &= 2 \left[\frac{h_\beta}{h_\alpha} (\lambda + 2\mu) + \frac{h_\alpha}{h_\beta} \mu \right], \qquad \alpha \neq \beta, \\
A_{1 i_1 i_2}^{1 i_1 - 1, i_2} &= A_{1 i_1 i_2}^{1 i_1 + 1, i_2} = -\frac{h_2}{h_1} (\lambda + 2\mu), \\
A_{1 i_1 i_2}^{1 i_1, i_2 + 1} &= A_{1 i_1 i_2}^{1 i_1, i_2 - 1} = -\frac{h_1}{h_2} \mu, \\
A_{2 i_1 i_2}^{2 i_1 - 1, i_2} &= A_{2 i_1 i_2}^{2 i_1 + 1, i_2} = -\frac{h_2}{h_1} \mu, \\
A_{2 i_1 i_2}^{2 i_1, i_2 - 1} &= A_{2 i_1 i_2}^{2 i_1, i_2 + 1} = -\frac{h_1}{h_2} (\lambda + 2\mu),
\end{aligned} \tag{13}$$

$$A_{\alpha i_1 i_2}^{\alpha i_1+1,i_2+1}=A_{\alpha i_1 i_2}^{\alpha i_1-1,i_2-1}=0,$$

$$A_{\alpha i_1 i_2}^{\beta i_1 i_2}=-(\lambda+\mu).$$

$$A_{\alpha i_1 i_2}^{\beta i_1-1,i_2}=A_{\alpha i_1 i_2}^{\beta i_1+1,i_2}=A_{\alpha i_1 i_2}^{\beta i_1,i_2-1}=A_{\alpha i_1 i_2}^{\beta i_1,i_2+1}=\frac{\lambda+\mu}{2},$$

$$A_{\alpha i_1 i_2}^{\beta i_1+1,i_2+1}=A_{\alpha i_1 i_2}^{\beta i_1-1,i_2-1}=-\frac{(\lambda+\mu)}{2}.$$

现在计算当 $i_1 \neq 0$，N_1 时的 $A_{\alpha i_1 0}^{\beta j_1 j_2}$. 根据前面所作的说明，只有以下系数可能不为零：

$$A_{\alpha i_1 0}^{\beta i_1 0},\ A_{\alpha i_1 0}^{\beta i_1 1},\ A_{\alpha i_1 0}^{\beta i_1+1,0},\ A_{\alpha i_1 0}^{\beta i_1-1,0},\ A_{\alpha i_1 0}^{\beta i_1+1,1},$$

它们分别等于

$$\begin{aligned}
&A_{\alpha i_1 0}^{\alpha i_1 0}=\frac{h_\beta}{h_\alpha}(\lambda+2\mu)+\frac{h_\alpha}{h_\beta}\mu,\quad \alpha\neq\beta,\\
&A_{1 i_1 0}^{1 i_1 1}=-\frac{h_1}{h_2}\mu,\\
&A_{1 i_1 0}^{1 i_1+1,0}=A_{1 i_1 0}^{1 i_1-1,0}=-\frac{h_2}{2h_1}(\lambda+2\mu),\\
&A_{2 i_1 0}^{2 i_1 1}=-\frac{h_1}{h_2}(\lambda+2\mu),\\
&A_{2 i_1 0}^{2 i_1+1,0}=A_{2 i_1 0}^{2 i_1-1,0}=-\frac{h_2}{2h_1}\mu,\\
&A_{\alpha i_1 0}^{\alpha i_1+1,1}=0,\\
&A_{\alpha i_1 0}^{\beta i_1 0}=A_{\alpha i_1 0}^{\beta i_1+1,1}=-\frac{\lambda+\mu}{2},\quad \alpha\neq\beta, \qquad (14)\\
&A_{\alpha i_1 0}^{\beta i_1 1}=\frac{\lambda+\mu}{2},\quad \alpha\neq\beta,\\
&A_{1 i_1 0}^{2 i_1+1,0}=A_{2 i_1 0}^{1 i_1-1,0}=\frac{\lambda}{2},\\
&A_{1 i_1 0}^{2 i_1-1,0}=A_{2 i_1 0}^{1 i_1+1,0}=\frac{\mu}{2}.
\end{aligned}$$

最后计算包含在方程中相应于左下角和右下角的系数

$A^{\beta j_1 j_2}_{\alpha i_1 i_2}$.

对于点 (0, 0) 有

$$A^{\alpha 00}_{\alpha 00} = \frac{1}{2}\left(\frac{h_\beta}{h_\alpha}(2\mu+\lambda) + \frac{h_\alpha}{h_\beta}\mu\right), \quad \alpha \neq \beta,$$

$$A^{110}_{100} = -\frac{h_2}{h_1}\frac{\lambda+2\mu}{2}, \quad A^{101}_{100} = -\frac{h_1}{h_2}\cdot\frac{\mu}{2},$$

$$A^{210}_{200} = -\frac{h_2}{h_1}\frac{\mu}{2},$$

$$A^{201}_{200} = -\frac{h_1}{h_2}\cdot\frac{\lambda+2\mu}{2}, \quad A^{\alpha 11}_{\alpha 11} = 0, \quad A^{\beta 00}_{\alpha 00} = 0, \alpha \neq \beta, \tag{15}$$

$$A^{210}_{100} = A^{101}_{200} = \frac{\lambda}{2}, \quad A^{110}_{200} = A^{201}_{100} = \frac{\mu}{2},$$

$$A^{\beta 11}_{\alpha 00} = -\frac{\lambda+\mu}{2}, \quad \alpha \neq \beta.$$

对点 $(l_1, 0)$, 有

$$A^{\alpha N_1 0}_{\alpha N_1 0} = \frac{h_\beta}{h_\alpha}\frac{\lambda+2\mu}{2} + \frac{h_\alpha}{h_\beta}\frac{\mu}{2},$$

$$A^{1 N_1-1,0}_{1 N_1 0} = -\frac{h_2}{h_1}\frac{\lambda+2\mu}{2}, \quad A^{1 N_1 1}_{1 N_1 0} = -\frac{h_1}{h_2}\mu,$$

$$A^{2 N_1-1,0}_{2 N_1 0} = -\frac{h_2}{h_1}\frac{\mu}{2} \qquad A^{2 N_1 1}_{2 N_1 0} = -\frac{h_1}{h_2}\frac{\lambda+2\mu}{2}, \tag{16}$$

$$A^{\beta N_1 0}_{\alpha N_1 0} = -\frac{\lambda+\mu}{2}, \quad \alpha \neq \beta,$$

$$A^{2 N_1-1,0}_{1 N_1 0} = A^{1 N_1 1}_{2 N_1 0} = \frac{\mu}{2}, \quad A^{2 N_1 1}_{1 N_1 0} = A^{1 N_1-1,0}_{2 N_1 0} = \frac{\lambda}{2}.$$

现在将(13)—(16)代入(11),进行一些改变后,得到:

方程的逼近

$$(\lambda+2\mu)(y_1)_{\bar{x}_1 x_1} + \mu(y_1)_{\bar{x}_2 x_2} + \frac{\lambda+\mu}{2}\left[(y_2)_{x_1 x_2} + (y_2)_{\bar{x}_1 \bar{x}_2}\right]$$

$$= -\frac{1}{h_1 h_2}\varphi_1, \qquad (x_1, x_2) \in \omega, \tag{17}$$

$$\frac{\lambda+\mu}{2}[(y_1)_{x_1x_2}+(y_1)_{\bar{x}_1\bar{x}_2}]+\mu(y_2)_{\bar{x}_1x_1}$$

$$+(\lambda+2\mu)(y_2)_{\bar{x}_2x_2}=-\frac{1}{h_1h_2}\varphi_2, \qquad (x_1,x_2)\in\omega;$$

边界条件的逼近

$$\left.\begin{aligned}&\mu[(y_1)_{x_2}+(y_2)_{x_1}]+\frac{h_2}{2}[(\lambda+2\mu)(y_1)_{\bar{x}_1x_1}\\&\quad+(\lambda+\mu)(y_2)_{x_1x_2}]=-\frac{\varphi_1}{h_1},\\&\lambda(y_1)_{x_1}+(\lambda+2\mu)(y_2)_{x_2}+\frac{h_2}{2}[(\lambda+\mu)(y_1)_{x_1x_2}\\&\quad+\mu(y_2)_{\bar{x}_1x_1}]=-\frac{\varphi_2}{h_1},\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

当 $x\in\bar{\omega}$, $x_2=0$, $x_1\neq 0, l_1$;

角点处边界条件的逼近

$$\left.\begin{aligned}&\frac{h_2}{h_1+h_2}[(\lambda+2\mu)(y_1)_{x_1}+\lambda(y_2)_{x_2}]+\frac{h_1}{h_1+h_2}\\&\quad\times\mu[(y_1)_{x_2}+(y_2)_{x_1}]+\frac{h_1h_2}{h_1+h_2}\\&\quad\times(\lambda+\mu)(y_2)_{x_1x_2}=-\frac{2}{h_1+h_2}\varphi_1,\\&\frac{h_1}{h_1+h_2}[\lambda(y_1)_{x_1}+(\lambda+2\mu)(y_2)_{x_2}]+\frac{h_2}{h_1+h_2}\\&\quad\times\mu[(y_1)_{x_2}+(y_2)_{x_1}]+\frac{h_1h_2}{h_1+h_2}\\&\quad\times(\lambda+\mu)(y_1)_{x_1x_2}=-\frac{2}{h_1+h_2}\varphi_2,\end{aligned}\right\} \tag{19}$$

当 $x_1=x_2=0$,

$$-\frac{h_2}{h_1+h_2}[(\lambda+2\mu)(y_1)_{\bar{x}_1}+\lambda(y_2)_{x_2}]$$

$$+\frac{h_1}{h_1+h_2}\mu[(y_1)_{x_2}+(y_2)_{\bar{x}_1}]=-\frac{2}{h_1+h_2}\varphi_1, \tag{20}$$

$$\frac{h_1}{h_1+h_2}[(\lambda+2\mu)(y_2)_{x_2}+\lambda(y_1)_{\bar{x}_1}]$$

$$-\frac{h_2}{h_1+h_2}\mu[(y_1)_{x_2}+(y_2)_{\bar{x}_1}]=-\frac{2}{h_1+h_2}\varphi_2,$$

当 $x_1=l_1,\ x_2=0.$

在边界其它各段，类似(18)--(20)也可以写出方程.

我们来计算所构造的方程(17)—(20)的逼近误差. 不难验证，方程(17)的逼近误差具有形式

$$\psi_\alpha(x)=\left(\frac{1}{h_1h_2}\varphi_\alpha-F_\alpha(x)\right)+O(h_1^2+h_2^2),\quad x\in\omega.$$

但由(12)得到，当 $x_i\in\omega$ 时，

$$\varphi_\alpha=\iint_G\eta_i(x)F_\alpha(x)dx_1dx_2,$$

而

$$\iint_G\eta_i(x)dx_1dx_2=h_1h_2,\quad \iint_G\eta_i(x)(x_\alpha-x_\alpha^{(i_\alpha)})dx_1dx_2=0.$$

因此对于足够光滑的 $F_\alpha(x)$，

$$\frac{1}{h_1h_2}\varphi_\alpha-F_\alpha(x)=O(h_1^2+h_2^2)$$

所以

$$\psi_\alpha(x)=O(h_1^2+h_2^2).$$

对于方程(18)我们得到

$$\psi_\alpha(x_1,0)=-f_\alpha(x_1,0)-\frac{h_2}{2}F_\alpha(x_1,0)$$

$$+\frac{\varphi_\alpha}{h_1}+O(h_1^2+h_2^2),\quad x_1\neq 0,\ l_1.$$

根据(12)

$$\varphi_\alpha(x_1,0)=\iint_G F_\alpha(x)\eta_{i_10}(x)dx$$

$$+\int_0^{l_1}\eta_{i_10}(x_1,0)f_\alpha(x_1,0)dx_1.$$

因为

$$\iint_G \eta_{i_10}(x)dx = \frac{h_1h_2}{2}, \quad \int_0^{l_1} \eta_{i_10}(x_1, 0)dx_1 = h_1,$$

$$\int_0^{l_1} \eta_{i_10}(x_1, 0)(x_1 - x_1^{(i_1)})dx_1 = 0,$$

所以对足够光滑的 $F_\alpha(x)$ 和 $f_\alpha(x_1, 0)$

$$\varphi_\alpha(x_1, 0) = \frac{h_1h_2}{2} F_\alpha(x_1, 0) + h_1 f_\alpha(x_1, 0) + O(h_1(h_1^2 + h_2^2)),$$

因此

$$\psi_\alpha(x_1, 0) = O(h_1^2 + h_2^2), \quad x \neq 0, l_1.$$

方程(19)的逼近误差可表示为

$$\begin{aligned}
\psi_\alpha(0, 0) = & -f_\alpha(0, 0) - \frac{h_1h_2}{2(h_1 + h_2)} F_\alpha(0, 0) \\
& + \frac{2}{h_1 + h_2} \varphi_\alpha(0, 0) + \frac{1}{2(h_1 + h_2)} \\
& \times \left[h_1^2 \lambda \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + h_1h_2(\lambda + \mu) \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \right. \\
& \left. + h_2^2 \mu \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right] u_\beta + O(h_1^2 + h_2^2), \qquad \alpha \neq \beta,
\end{aligned}$$

并且根据(12)

$$\begin{aligned}
\varphi_\alpha(0, 0) = & \iint_G \eta_{00}(x) F_\alpha(x) dx + \int_0^{l_1} \eta_{00}(x_1, 0) \\
& \times f_\alpha(x_1, 0) dx_1 + \int_0^{l_2} \eta_{00}(0, x_2) f_\alpha(0, x_2) dx_2 \\
& - \frac{h_1 + h_2}{2} f_\alpha(0, 0) + O(h_1^2 + h_2^2).
\end{aligned}$$

所以

$$\psi_\alpha(0,0) = O(h_1 + h_2).$$

类似地可证明

$$\psi_\alpha(l_1, 0) = O(h_1 + h_2).$$

§5. 四阶方程的边值问题

本节我们引入在弹性薄板弯曲理论中遇到的基本的四阶微分方程. 以双调和方程为例列出四阶方程的连接条件和各种可能的边界条件. 连接条件和边界条件先以四阶常微分方程为例作为模型.

1. 四阶方程. 我们在第一章 §1 中已指出,受横向荷载的各向同性均匀薄板在小挠度情况下的平衡可近似地用下面的方程来描述

$$\Delta^2 w = \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial x_2^4} = \frac{q}{D}, \tag{1}$$

这里 w 是薄板中面的挠度, $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$ 是板的柱刚度系数, E 是杨氏模量, ν 是泊松系数, h 是板的厚度, q 是横向荷载的强度.

如果板的柱刚度系数 D 不是常数,这是可能的,例如在变厚度 $h(x)$ 的情形下,则根据第一章 §1(15)和(19),平衡方程的形式为

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\left[D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)\right] + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\left[D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right)\right]$$

$$+ 2\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}\left[D(1-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2}\right] = q. \tag{2}$$

如果板的材料不是各向同性的,且就其弹性性质而言,具有三个相互正交的对称平面,那么该薄板称为直向的. 如果取这些平面为坐标平面,则直向材料的虎克定律有如下形式

$$\tau_{11} = \frac{E_1}{1-\nu_1\nu_2}(\varepsilon_{11} + \nu_2\varepsilon_{22}),$$

$$\tau_{12} = \frac{E_2}{1-\nu_1\nu_2}(\varepsilon_{22} + \nu_1\varepsilon_{11}), \quad \tau_{12} = G\varepsilon_{12},$$

这里 E_1 和 E_2 是杨氏模量，ν_1 和 ν_2 是泊松系数($E_1\nu_2=E_2\nu_1$)，G 是剪切模量(各向同性时 $G = E/2(1+\nu)$)。

均匀直向薄板平衡方程为

$$D_1\frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} + 2D_3\frac{\partial^4 w}{\partial x_1^2\partial x_2^2} + D_2\frac{\partial^4 w}{\partial x_2^4} = q. \tag{3}$$

其中

$$D_1 = \frac{E_1h^3}{12(1-\nu_1\nu_2)}, \quad D_2 = \frac{E_2h^3}{12(1-\nu_1\nu_2)},$$

$$D_3 = D_1\nu_2 + 2D_{KP}, \quad D_{KP} = Gh^3/12$$

(D_1 和 D_2 是抗弯刚度系数，D_{KP} 是抗扭刚度系数)。

如果直向薄板又不是均匀的，则平衡方程为

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\left[D_1\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu_2\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)\right] + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\left[D_2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \nu_1\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right)\right] + 4\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}\left[D_{KP}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\partial x_2}\right] = q. \tag{4}$$

考虑到更一般的各向异性板，考虑中面上的力以及其它情况，还可以写出描述薄板平衡的一系列四阶方程，但我们不去这样做了.

2. 四阶常微分方程的连接条件. 在列出方程(1),(2)的连接条件之前，我们讨论方程(1)的一维模型. 在横向荷载作用下的均匀杆的平衡方程就是这种模型：

$$Bw^{(4)}(x) = q(x). \tag{5}$$

这里 $B = EJ$ 是抗弯刚度系数，E 是杨氏模量，J 是杆截面的惯性矩，q 是外荷载强度. 通常称 w 为挠度，w' 为转角，Bw'' 为弯矩，Bw''' 为剪力. 讨论长度为 l 的杆，左端坐标为 $x=0$，右端为 $x=l$. 量

$$W = \frac{B}{2}\int_0^l (w'')^2 dx \tag{6}$$

称为杆弯曲的弹性变形能．不难验证，求方程(5)的解等价于找一个函数 $w(x)$，使泛函

$$I(w)=W-\int_0^l w(x)q(x)dx$$

的一阶变分为零．

考虑两个杆的系统，其中一个位于 x 轴的区间 $[-l, 0]$ 上，而另一个在区间 $[0, l]$ 上．假定左杆的刚度系数等于 B^-，而右杆等于 B^+．设两杆处在强度为 $q(x)$ 的外荷载作用之下．根据(6)，左(右)杆的能量为

$$W^-=\frac{B^-}{2}\int_{-l}^0 (w'')^2dx \quad \left(W^+=\frac{B^+}{2}\int_0^l (w'')^2dx\right).$$

引入泛函

$$I(w)=W^-+W^+-\int_{-l}^l w(x)q(x)dx. \tag{7}$$

令它的一阶变分等于零，我们来说明函数 $w(x)$ 在 $x=0$ 应当满足什么样的连接条件．我们有

$$\begin{aligned}\delta I &= \frac{d}{dt}I(w+t\delta w)\big|_{t=0}\\ &= B^-\int_{-l}^0 w''\delta w''dx+B^+\int_0^l w''\delta w''dx\\ &\quad -\int_{-l}^l q\delta w dx.\end{aligned}$$

进行分部积分并令 $\delta I=0$，得到

$$\begin{aligned}&B^-\int_{-l}^0 w^{(4)}\delta w dx+B^+\int_0^l w^{(4)}\delta w dx-\int_{-l}^l q\delta w dx\\ &\quad +B^-(w''\delta w'-w'''\delta w)\Big|_{-l}^0\\ &\quad +B^+(w''\delta w'-w'''\delta w)\Big|_0^l=0.\end{aligned}$$

由此，利用函数 δw 的任意性，在 $x=0$ 有

$$B^{-}(w''\delta w' - w'''\delta w)|_{x=-0} - B^{+}(w''\delta w' - w'''\delta w)|_{x=+0} = 0. \tag{8}$$

$x=0$ 处的连接条件决定于互相作用的两个杆在这一点的连接方式．我们假定在连接处 $x=0$ 两杆的挠度相等，即

$$w(-0) = w(+0). \tag{9}$$

显然，函数 δw 也应当满足这个条件，即 $\delta w(-0)=\delta w(+0)$．

现在如果假设两杆是刚接的，亦即，除挠度外，它们的转角也相等

$$w'(-0) = w'(+0), \tag{10}$$

则方程(8)的形式为

$$(B^{+}w'''|_{x=+0} - B^{-}w'''|_{x=-0})\delta w(0) - (B^{+}w''|_{x=+0} - B^{-}w''|_{x=-0})\delta w'(0) = 0, \tag{11}$$

因为在此情况下函数 $\delta w'$ 也是连续的．

再次利用函数 $\delta w(x)$ 的任意性，在(11)中先令 $\delta w'(0)=0$，然后令 $\delta w(0)=0$，我们得到

$$B^{+}w''|_{x=+0} = B^{-}w''|_{x=-0}, \quad B^{+}w'''|_{x=+0} = B^{-}w'''|_{x=-0}. \tag{12}$$

设

$$B = B(x) = \begin{cases} B^{-}, & x < 0, \\ B^{+}, & x > 0, \end{cases}$$

回想起早先引入的记号

$$[v]|_{x=0} = v(+0) - v(-0) = v_{п} - v_{л}$$

并综合(9)，(10)，(12)，我们得到两杆刚接点上一组完整的连接条件

$$[w] = [w'] = [Bw''] = [Bw'''] = 0, \qquad x = 0. \tag{13}$$

再讨论在点 $x=0$ 处两杆的其它连接方式．例如假设在这一点两杆是铰接的，即不限制它们相互间的转动（理想铰接）．在这种情况下已经不能再假定满足条件(10)，因此不能

要求函数 $\delta w'$ 在点 $x=0$ 连续．这时方程(8)取形式

$$(B^+w'''|_{x=+0}-B^-w'''|_{x=-0})\delta w(0)$$

$$-B^+w''\delta w'|_{x=+0}+B^-w''\delta w'|_{x=-0}=0. \qquad (14)$$

利用函数 $\delta w(x)$ 的任意性，在 (14) 中依次令 $\delta w'(-0)$ 和 $\delta w'(+0)$，$\delta w'(-0)$ 和 $\delta w(0)$，$\delta w'(+0)$ 和 $\delta w(0)$ 等于 0，得到如下条件：

$$[Bw''']_{x=0}=0,\ B^+w''|_{x=+0}=B^-w''|_{x=-0}=0.$$

将方程(9)和这些条件合在一起，我们得到理想铰接点上一组完整的连接条件

$$[w]=w''(-0)=w''(+0)=[Bw''']=0,$$

$$x=0. \qquad (15)$$

讨论比(7)稍为更一般的泛函

$$I(w)=\frac{B^-}{2}\int_{-l}^{0}(w'')^2dx+\frac{B^+}{2}\int_{0}^{l}(w'')^2dx$$

$$+\left(\frac{\alpha}{2}[w']^2+\frac{\beta}{2}w^2\right)_{x=0}-\int_{-l}^{l}qwdx. \qquad (16)$$

这里 α 和 β 是某些非负常数，它们的意义将在稍后一点说明．泛函中有一项 $\frac{\beta}{2}w^2(0)$，追使我们假定 $w(x)$ 在点 $x=0$ 的连续性，而项 $\frac{\alpha}{2}[w']^2=\frac{\alpha}{2}\{w'(+0)-w'(-0)\}^2$ 只当函数 $w'(x)$ 在 $x=0$ 处为间断时才有意义．

写出泛函(16)的变分并用分部积分来对它进行变换

$$\delta I=B^-\int_{-l}^{0}w^{(4)}\delta wdx+B^+\int_{0}^{l}w^{(4)}\delta wdx$$

$$-\int_{-l}^{l}q\delta wdx+B^-(w''\delta w'-w'''\delta w)\Big|_{-l}^{0}$$

$$+B^+(w''\delta w'-w'''\delta w)\Big|_{0}^{l}$$

$$+\alpha[w'][\delta w']|_{x=0}+\beta w\delta w|_{x=0}.$$

令变分为 0 并利用函数 δw 的任意性，在 $x=0$ 有

$$\{[Bw'''] + \beta w\}\delta w|_{x=0} + \{-\alpha[w'] + Bw''\}\delta w'|_{x=-0} + \{\alpha[w'] - Bw''\}\delta w'|_{x=+0} = 0.$$

利用选择 δw 的任意性，依次令 $\delta w'(-0)$ 和 $\delta w'(+0)$，$\delta w(0)$ 和 $\delta w'(+0)$，$\delta w(0)$ 和 $\delta w'(-0)$ 等于 0，得到函数 w 的下述连接条件

$$[Bw'''] = -\beta w|_{x=0},$$

$$\alpha[w'] = Bw''|_{x=-0}, \quad \alpha[w'] = Bw''|_{x=+0}.$$

将最后两个条件相减和相加并注意 w 在点 $x=0$ 连续，我们得到在点 $x=0$ 上一组完整的连接条件

$$[w] = 0 \quad \alpha[w'] = Bw'', \ [Bw''] = 0,$$

$$[Bw'''] = -\beta w. \tag{17}$$

现在说明参数 α 和 β 的力学意义．如果令 $\alpha=0$，则(17)的前三个条件和(15)的前三个条件相同；而后者是描述理想铰接．考虑到这个类似性，我们称 α 为铰接刚度系数．当 $\alpha\to\infty$ 时(17)的第二个条件变为条件 $[w']=0$，所以(17)的前三个条件和(13)的前三个条件相同．但条件(13)是描述杆的刚性连接，自然可看作是无穷刚度的铰接，即刚度系数 $\alpha=\infty$ 的铰接．而这正是我们所得到的．

当 $\beta\to\infty$ 时条件(17)中最后一个变成 $w(0)=0$，但这个条件意味着在点 $x=0$ 处杆由刚性支座支撑着，所以 β 可以称为支座刚度系数．

现在来讨论条件(17)的所有可能的特殊情形：

1. $\alpha=\beta=0$.

$$[w] = 0 \quad w''_{\text{л}} = w''_{\text{п}} = 0 \quad [Bw'''] = 0.$$

条件 $\alpha=0$ 表示理想铰接，而条件 $\beta=0$ 表示在点 $x=0$ 没有支座．这些条件与条件(15)相同．这里 $w_{\text{л}}=w(-0)$，$w_{\text{п}}=w(+0)$.

2. $\alpha = \text{const}$, $\beta = 0$.

$$[w]=0,\ \alpha[w'] = Bw'',\ [Bw''] = [Bw''']=0.$$

这是具有有限刚度系数的铰接条件.

3. $\alpha = \infty$, $\beta = 0$.

条件 $\alpha = \infty$ 表示导数w'在点 $x = 0$ 连续,因此表达式(16) 中的相应项不存在. 特别由此得到,(16) 中的两个积分可以用积分限为$-l$ 到 l 的一个积分代替. 连接条件形式为

$$[w] = [w'] = [Bw''] = B[w'''] = 0.$$

这个条件表示,两杆的连接是绝对刚性的,它们可以看成为一个杆. 这里的条件与条件(13)相同.

4. $\alpha = 0$, $\beta = \text{const}$.

$$[w]=0,\ w''_л = w''_п = 0,\ [Bw'''] = -\beta w.$$

前三个条件说明是理想铰接,而第四个条件表示在杆连接点上有弹性支座.

5. $\alpha = \text{const}$, $\beta = \text{const}$.

$$[w]=0,\ \alpha[w'] = Bw'',\ [Bw''] = 0,\ [Bw'''] = -\beta w.$$

前三个条件表示有限刚度铰接,而第四个条件表示弹性支撑.

6. $\alpha = \infty$, $\beta = \text{const}$.

$$[w] = [w'] = [Bw''] = 0,\quad [Bw'''] = -\beta w.$$

前三个条件说明两杆的连接是绝对刚性的,即象一个杆,而第四个条件说明存在弹性支座.

7. $\alpha = 0$, $\beta = \infty$.

$$w_л = w_п = w''_л = w''_п = 0.$$

第一和第三个条件表示左杆在点 $x = 0$ 简支,而第二和第四个条件表示右杆在点 $x = 0$ 简支. 这种情况下两杆相互之间没有任何联系,可以看作是分开的.

8. $\alpha = \text{const}$, $\beta = \infty$.

$$w_л = w_п = 0,\ \alpha[w'] = Bw'',\ [Bw''] = 0.$$

这是绝对刚性支座支撑着的有限刚度铰接.

9. $\alpha = \infty$, $\beta = \infty$.

$$w_л = w_п = 0,\ [w'] = [Bw''] = 0.$$

杆在点 $x = 0$ 由绝对刚性的支座支撑着.

3. 四阶偏微分方程的连接条件. 现在我们回到薄板平衡方程(2). 讨论各向同性矩形板,它占有平面 Ox_1x_2 上的区域 $G_+ = \{x = (x_1, x_2) | 0 \leqslant x_\alpha \leqslant l_\alpha, \alpha=1, 2\}$. 我们在第一章已经指出,板的弯曲弹性变形能为

$$W = \frac{1}{2}\int_0^{l_1}\int_0^{l_2} D\left\{(\Delta w)^2 - 2(1-\nu) \times \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2}\right)^2\right]\right\} dx_1 dx_2. \tag{18}$$

设所考虑的薄板在边 $x_1 = 0$ 上与支撑它的杆刚结,杆的抗弯刚度系数是 B^+, 而抗扭刚度系数为 C^+. 我们已经知道,杆的弯曲弹性变形能为

$$\frac{1}{2}\int_0^{l_2} B^+\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)^2 dx_2; \tag{19}$$

以下积分称为杆的扭转弹性变形能:

$$\frac{1}{2}\int_0^{l_2} C^+\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2}\right)^2 dx_2. \tag{20}$$

把这些表达式加到(18)式中，我们得到有加强杆的薄板的能量表达式

$$W^+ = \frac{1}{2}\int_0^{l_1}\int_0^{l_2} D\left\{(\Delta w)^2 - 2(1-\nu)\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2}\right)^2\right]\right\} dx_1 dx_2 + \frac{1}{2}\int_0^{l_2}\left[B^+\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)^2 + C^+\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2}\right)^2\right]_{x_1=0} dx_2. \tag{21}$$

再考察一块板，它占有区域 $G_- = \{x = (x_1, x_2) | -l_1 \leqslant x_1 \leqslant 0, 0 \leqslant x_2 \leqslant l_2\}$，同时在边 $x_1 = 0$ 上也有刚度为 B^- 和 C^- 的加强杆．这块板的能量是

$$W^- = \frac{1}{2}\int_{-l_1}^{0}\int_{0}^{l_2} D\left\{(\Delta w)^2 - 2(1-\nu)\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2}\right)^2\right]\right\} dx_1 dx_2 + \frac{1}{2}\int_0^{l_2}\left[B^-\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)^2 + C^-\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2}\right)^2\right]_{x_1=0} dx_2. \quad (22)$$

以某种铰接来连接这两个板，并且假定所得系统的能量为

$$W = W^+ + W^- + \frac{1}{2}\int_0^{l_2}\left\{\alpha\left[\frac{\partial w}{\partial x_1}\right]^2 + \beta w^2\right\}_{x_1=0} dx_2. \quad (23)$$

这里正如杆件系统的能量表达式那样，α 是铰接刚度系数，而 β 是铰接底下可能存在的支座刚度系数．

写出泛函

$$I(\omega) = W - \int_{-l_1}^{l_1}\int_0^{l_2} q(x) w dx_1 dx_2. \quad (24)$$

求出它的一阶变分并令其为 0．利用分部积分来变换所得关系式并引入记号

$$M_1(x) = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right),$$

$$Q_1(x) = -\frac{\partial}{\partial x_1}\left(D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)\right) - 2\frac{\partial}{\partial x_2}\left((1-\nu)D\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2}\right), \quad (25)$$

我们有

$$
\begin{aligned}
\delta I = \int_0^{l_2} \Big\{ & M_1 \frac{\partial}{\partial x_1}\delta w \Big|_{x_1=+0} - Q_1 \delta w \big|_{x_1=+0} \\
& - M_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \delta w \Big|_{x_1=-0} + Q_1 \delta w \big|_{x_1=-0} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \\
& \times \left(B^+ \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right) \delta w \Big|_{x_1=+0} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \left(B^- \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right) \\
& \times \delta w \Big|_{x_1=-0} - \frac{\partial}{\partial x_2} \left(C^+ \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right) \frac{\partial}{\partial x_1} \delta w \Big|_{x_1=+0} \\
& - \frac{\partial}{\partial x_2} \left(C^- \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right) \frac{\partial}{\partial x_1} \delta w \Big|_{x_1=-0} \\
& + \alpha \left[\frac{\partial w}{\partial x_1} \Big|_{x_1=+0} - \frac{\partial w}{\partial x_1} \Big|_{x_1=-0} \right] \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \delta w \Big|_{x_1=+0} \right. \\
& \left. - \frac{\partial}{\partial x_1} \delta w \Big|_{x_1=-0} \right] + \beta \omega \delta \omega \big|_{x_1=0} \Big\} dx_2 + \cdots ,
\end{aligned}
$$

这里省略号表示与铰接无关的项. 从(23)得知，函数 $w(x)$ 应当在 $x_1 = 0$ 连续,因此它的变分 δw 也应当连续.

现在依次令 δw, $\frac{\partial}{\partial x_1} \delta w \Big|_{x_1=+0}$ 和 $\frac{\partial}{\partial x_1} \delta w \Big|_{x_1=-0}$ 的系数等于零,得到

$$
[Q_1]\big|_{x_1=0} = \beta w + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \left\{ (B^+ + B^-) \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right\} \Big|_{x_1=0},
$$

$$
\alpha \left[\frac{\partial w}{\partial x_1} \right] \Big|_{x_1=0} = - M_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(C^+ \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right) \Big|_{x_1=+0},
$$

$$
\alpha \left[\frac{\partial w}{\partial x_1} \right] \Big|_{x_1=0} = - M_1 - \frac{\partial}{\partial x_2} \left(C^- \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right) \Big|_{x_1=-0}.
$$

如果代替最后两个关系式写出它们的平均值及差，则连接条件看起来将更为对称. 如果这里再加入 w 在 $x_1 = 0$ 连续的条件,则有 $[w] = 0$, 并且当 $x_1 = 0$ 时有

$$\alpha\left[\frac{\partial w}{\partial x_1}\right]=\frac{1}{2}\left\{D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)\Big|_{x_1=+0}+D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right.\right.$$
$$\left.+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)\Big|_{x_1=-0}+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(C^+\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\partial x_2}\right)\Big|_{x_1=+0}$$
$$\left.-\frac{\partial}{\partial x_2}\left(C^-\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\partial x_2}\right)\Big|_{x_1=-0}\right\},\tag{26}$$
$$\left[D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)\right]=-\left\{\frac{\partial}{\partial x_2}\left(C^+\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\partial x_2}\right)\Big|_{x_1=+0}\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(C^-\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\partial x_2}\right)\Big|_{x_1=-0}\right\},$$
$$\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)\right)+2\frac{\partial}{\partial x_2}\left((1-\nu)D\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\partial x_2}\right)\right]$$
$$=-\beta w-\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}(B^++B^-)\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}.$$

为书写简单起见，使用记号(25)，写出条件(26)最有意义的几种特殊情况.

1. $\alpha=\infty,\ \beta=B^\pm=C^\pm=0.$

$$[w]=\left[\frac{\partial w}{\partial x_1}\right]=[M_1]=[Q_1]=0,\ \text{当}\ x_1=0.$$

这些条件表示板是刚接的，所述条件还可改写为

$$[w]=\left[\frac{\partial w}{\partial x_1}\right]=\left[D\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right]$$
$$=\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(D\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right)\right]=0,\ x_1=0.$$

2. $\alpha=\beta=0,\ B^+=B^-=B,\ C^+=C^-=C.$

$$[w]=M_1\mp\frac{\partial}{\partial x_2}\left(C\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\partial x_2}\right)\Big|_{x_1=\pm0}=0,$$
$$[Q_1]=2\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\left(B\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right).$$

这里我们牵涉到的是用理想铰接方式连接的两块同样的薄

板，并且它们的铰接边是用加强肋加固的，这些肋条无论对弯曲还是扭转都起作用.

3. $\alpha=\infty,\ \beta=0,\ B^{+}=B^{-}=B,\ \ C^{+}=C^{-}=C.$

$$[w]=\left[\frac{\partial w}{\partial x_1}\right]=0,\quad [M_1]=2\frac{\partial}{\partial x_2}\left(C\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\partial x_2}\right),$$

$$[Q_1]=2\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\left(B\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right).$$

这些条件相应于由一加强肋加固的一块整板.

4. $\alpha=\beta=C^{-}=C^{+}=0,\ B^{+}=B^{-}=B.$

$$[w]|_{x_1=0}=M_1|_{x_1=\pm 0}=0,$$

$$[Q_1]=2\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\left(B\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right),\ x_1=0.$$

这些条件与条件 2 的区别在于加固加强肋对扭转不起作用. 这时两块薄板可以看成和加强杆不是刚性连接，而是支撑在杆上.

5. $\alpha=\infty,\ \beta=C^{-}=C^{+}=0,\ B^{+}=B^{-}=B.$

$$[w]=\left[\frac{\partial w}{\partial x_1}\right]=\left[D\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right]=0,$$

$$[Q_1]=2\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\left(B\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right).$$

杆作为刚接的两块薄板(整块板)的支座.

4. 杆的平衡方程的边界条件. 我们写出方程 (5) 在点 $x=0$ 处的边界条件. 对杆的能量表达式(6)加上两项

$$\frac{\alpha}{2}(w'(0))^2 \text{和} \frac{\beta}{2}w^2(0),$$

并且假定，由于某种方式将杆在点 $x=0$ 固定，结果使它的能量具有形式

$$W=\frac{B}{2}\int_0^l (w'')^2 dx+\frac{\alpha}{2}(w'(0))^2+\frac{\beta}{2}w^2(0). \quad (27)$$

现在写出泛函

$$I(w)=W-\int_0^l q(x)w(x)dx,$$

计算其一阶变分并令它等于0．用分部积分变换后，我们有

$$\delta I=B\int_0^l w^{(4)}\delta w dx+B(w''\delta w'$$

$$-w'''\delta w)|_0^l+(\alpha w'\delta w'+\beta w\delta w)|_{x=0}=0.$$

由此按通常办法得到边界条件

$$-Bw''+\alpha w'=0,\ Bw'''+\beta w=0. \tag{28}$$

我们来讨论条件(28)的一些特殊情况：

1. $\alpha=\beta=\infty$．挠度和转角等于0．这是刚性镶嵌条件(刚性嵌固)

$$w=w'=0.$$

2. $\alpha=0,\beta=\infty$．挠度和力矩等于0．这是简支条件

$$w=w''=0.$$

3. $\alpha=\beta=0$．这时弯矩和剪力等于0． 我们得到自由端条件

$$w''=w'''=0.$$

4. $\alpha=\infty,\ \beta=0$．转角和剪力等于0． 这就是对称性条件

$$w'=w'''=0.$$

5. $\alpha=\text{const}.\ \beta=\infty$． 挠度等于0，而力矩与转角成比例．这就是弹性嵌入条件

$$w=0,\ -Bw''+\alpha w'=0.$$

6. $\alpha=0,\beta=\text{const}.$ 力矩等于0，而剪力与挠度成比例．这是弹性支撑条件

$$w''=0,\ Bw'''+\beta w=0.$$

根据所导出的边界条件(28)的特殊情形，使我们有理由

称 α 为镶嵌刚度系数，而 β 为支座刚度系数.

5. 各向同性薄板平衡方程的边界条件. 现在转入讨论各向同性薄板的平衡方程(2)并推导出它的边界条件. 考察矩形板，它在平面 $O_{x_1x_2}$ 上占有区域 $G=\{x=(x_1, x_2)|0\leqslant x_\alpha\leqslant l_\alpha, \alpha=1, 2\}$. 假定在它的边 $x_1=0$ 上有抗弯刚度系数等于 B 而抗扭刚度系数等于 C 的加强肋条.

我们写出方程(2)在 $x_1=0$ 的边界条件. 如果不考虑加强刚度的肋条和边界的固定方式，则薄板能量由关系式 (18) 表示，加强肋的弯曲和扭转能量分别由关系式(19)和 (20) 表示. 将板的边 $x_1=0$ 以某种方式固定，我们假定它的能量是

$$W=\frac{1}{2}\int_0^{l_1}\int_0^{l_2}\left\{D(\Delta w)^2-2(1-\nu)D\right.$$
$$\left.\times\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}-\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\partial x_2}\right)^2\right]\right\}dx_1dx_2$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^{l_2}\left\{B\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)^2+C\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\partial x_2}\right)^2\right\}_{x_1=0}dx_2$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^{l_2}\left\{\alpha\left(\frac{\partial w}{\partial x_1}\right)^2+\beta w^2\right\}_{x_1=0}dx_2 \tag{29}$$

现在写出泛函

$$I(\omega)=W-\int_0^{l_1}\int_0^{l_2}q(x)w(x)dx_1dx_2,$$

计算它的一阶变分并令它为零. 经过通常的变换写出只与边 $x_1=0$ 有关的项，则有

$$\delta I=\int_0^{l_2}\left\{-D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)\frac{\partial}{\partial x_1}\delta w\right.$$
$$+\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\left(D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)\right)\right.$$
$$\left.+2\frac{\partial}{\partial x_2}\left((1-\nu)D\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\partial x_2}\right)\right)\delta w$$

$$+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\left(B\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)\delta w-\frac{\partial}{\partial x_2}\left(C\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\partial x_2}\right)\frac{\partial}{\partial x_1}\delta w$$

$$+\alpha\frac{\partial w}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial}{\partial x_1}\delta w+\beta w\delta w\bigg\}_{x_1=0}dx_2+\cdots, \tag{30}$$

依次令 $\frac{\partial}{\partial x_1}\delta w$ 和 δw 的系数为零，得到所求的边界条件

$$\alpha\frac{\partial w}{\partial x_1}=D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(C\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\partial x_2}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)\right)+2\frac{\partial}{\partial x_2}\left((1-\nu)D\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\partial x_2}\right)$$

$$=-\beta w-\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\left(B\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right), \tag{31}$$

当 $x_1=0$.

下面写出条件(31)最重要的几种特殊情况.

1. $\alpha=\beta=\infty$. 这是刚性嵌固边的情形

$$w=\frac{\partial w}{\partial x_1}=0. \tag{32}$$

2. $\alpha=C=0$, $\beta=\infty$, 这是简支边情形.

$$w=D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)=0, \tag{33}$$

或

$$w=\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}=0. \tag{34}$$

3. $\alpha=\beta=B=C=0$. 板边是自由的

$$D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)\right)$$

$$+2\frac{\partial}{\partial x_2}\left((1-\nu)D\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\partial x_2}\right)=0. \tag{35}$$

4. $\alpha=\infty$，$\beta=B=0$. 这时条件(31)变成对称性条件

$$\frac{\partial w}{\partial x_1}=\frac{\partial^3 w}{\partial x_1^3}=0. \tag{36}$$

5. $\alpha=\beta=0$. 板具有由加强肋加固的自由边.

再讨论薄板角点上的相容性条件. 为此我们写出矩形板的能量表达式，它沿着边 $x_1=0$ 和 $x_2=0$ 有钢筋加固，并用某种方式将这些边固定. 我们用足标—1 表示与边 $x_1=0$ 有关的参数（例如 α_{-1}）；用足标 -2 表示与边 $x_2=0$ 有关的参数(例如 B_{-2}).

板的能量有如下形式:

$$\begin{aligned}W=\mathring{W}&+\frac{1}{2}\int_0^{l_2}\left\{B_{-1}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)^2+C_{-1}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\partial x_2}\right)^2\right.\\&\left.+\alpha_{-1}\left(\frac{\partial w}{\partial x_1}\right)^2+\beta_{-1}w^2\right\}_{x_1=0}dx_2\\&+\frac{1}{2}\int_0^{l_1}\left\{B_{-2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right)^2+C_{-2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\partial x_2}\right)^2\right.\\&\left.+\alpha_{-2}\left(\frac{\partial w}{\partial x_2}\right)^2+\beta_{-2}w^2\right\}_{x_2=0}dx_1,\end{aligned}$$

这里 $\mathring{W}$ 由关系式(18)确定. 和平常一样，写出泛函 $I(w)$ 并计算它的一阶变分. 令变分表达式中那些与点 $x_1=x_2=0$ 有关的项等于零，我们有

$$\begin{aligned}&2(1-\nu)D\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\partial x_2}\,\delta w-B_{-1}\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\frac{\partial}{\partial x_2}\delta w\\&+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(B_{-1}\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)\delta w-C_{-1}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\partial x_2}\frac{\partial}{\partial x_1}\delta w\\&-B_{-2}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\frac{\partial}{\partial x_1}\delta w+\frac{\partial}{\partial x_1}B_{-2}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\delta w\\&-C_{-2}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\partial x_2}\frac{\partial}{\partial x_2}\delta w=0.\end{aligned} \tag{37}$$

现在令 δw, $\frac{\partial}{\partial x_1}\delta w$ 和 $\frac{\partial}{\partial x_2}\delta w$ 的系数等于零，得到当 $x_1 = x_2 = 0$ 时的相容性条件

$$
\begin{aligned}
&2(1-\nu)D\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(B_{-1}\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right) \\
&\qquad + \frac{\partial}{\partial x_1}\left(B_{-2}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right) = 0, \\
&B_{-1}\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + C_{-2}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} = 0, \\
&C_{-1}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} + B_{-2}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} = 0.
\end{aligned}
\tag{38}
$$

这些条件只有当 δw, $\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\delta w$ 本身不等于零时才成立. 例如，若 $\delta w = 0$，则相容性条件 (38) 的第一个删去. 当 $B_{-\alpha} = C_{-\alpha} = 0$, $\alpha = 1, 2$, 我们有唯一的相容性条件

$$
2(1-\nu)D\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} = 0. \tag{39}
$$

注: 因为我们在任何地方都没有考虑到外力在固定线上所作的功，所有写出的边界条件都是齐次的. 如果考虑到上述的力,则就得出非齐次条件.

§ 6. 四阶方程边值问题的逼近

本节我们对上一节所讨论的平衡方程，连接条件和边界条件构造网格逼近. 我们用逼近泛函的方法（参看第二章 § 3) 来构造网格逼近.

1. 板平衡方程的逼近. 讨论上一节写出的最一般的平衡方程——对于非均匀的直向薄板的方程 (4). 假定板是矩形的,在 Ox_1x_2 平面上,它占有区域

$$\bar{G}=\{x=(x_1,x_2)\mid 0\leqslant x_\alpha\leqslant l_\alpha\}.$$

受横向荷载作用的直向薄板的弹性变形能由以下关系式给出：

$$W(w)=\frac{1}{2}\int_0^{l_1}\int_0^{l_2}\left\{D_1\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right)^2+D_2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)\right.$$
$$+(D_1\nu_2+D_2\nu_1)\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}$$
$$\left.+4D_{kp}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\partial x_2}\right)^2\right\}dx_1dx_2. \tag{1}$$

考察泛函

$$I(w)=W(w)-\int_0^{l_1}\int_0^{l_2}q(x)w(x)dx_1dx_2. \tag{2}$$

不难验证，§5 方程(4)的各个解都使泛函 $I(w)$ 的一阶变分为零.

在区域 $\bar{G}$ 中引进矩形均匀网格 $\bar{\omega}=\bar{\omega}_1\times\bar{\omega}_2$，其中 $\bar{\omega}_\alpha=\{x_\alpha=x_\alpha^{(i_\alpha)}\mid,\ x_\alpha^{(i_\alpha)}=i_\alpha h_\alpha,\ i_\alpha=0,1,\cdots,N_\alpha\}$，并在这个网格上逼近泛函(2)，(1). 因为我们现在只对 §5 方程(4)的逼近感兴趣，为简单起见假设薄板沿边界是简支的，即满足 §5 中的边界条件(34).

将(1)中前三个积分和(2)中最后一项积分用梯形求积公式代替，而将(1)的最后一项积分用各种矩形求积公式的线性组合代替. 考虑到 §5 中的边界条件(34)，我们有

$$W\sim\frac{1}{2}\sum_{\omega}\left\{D_1\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right)^2+D_2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)^2\right.$$
$$\left.+(D_1\nu_2+D_2\nu_1)\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right\}h_1h_2$$
$$+\frac{1}{2}\left\{\sum_{\omega_1^+\times\omega_2^+}D_{kp}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\partial x_2}\right)^2h_1h_2+\sum_{\omega_1^+\times{}^+\omega_2}D_{kp}\right.$$
$$\times\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\partial x_2}\right)^2h_1h_2+\sum_{{}^+\omega_1\times\omega_2^+}D_{kp}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\partial x_2}\right)^2h_1h_2$$

$$+\sum_{+\omega_1\times{}^+\omega_2} D_{kp}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\partial x_2}\right)^2 h_1h_2\Big\},$$

$$\int_0^{l_1}\int_0^{l_2} q(x)\,w(x)\,dx_1dx_2 \sim \sum_{\omega} qwh_1h_2.$$

现在用差商来逼近导数. 设

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x_\alpha^2} \sim w_{\bar{x}_\alpha x_\alpha},$$

而每个和式中的混合导数将按这样的原则来逼近，即使得对于给定在 ϖ 上的函数可以进行相应的求和. 将所述逼近式代入(2),我们得到泛函 $I(w)$ 的如下逼近式:

$$I_h(y) = W_h(y) - \sum_{\omega} q(x)y(x)h_1h_2,$$

$$\begin{aligned}W_h(y) = \frac{1}{2}\sum_{\omega}\{&D_1(y_{\bar{x}_1x_1})^2 + D_2(y_{\bar{x}_2x_2})^2\\ &+ (D_1\nu_2 + D_2\nu_1)y_{\bar{x}_1x_1}y_{\bar{x}_2x_2}\}h_1h_2\\ &+ \frac{1}{2}\Big\{\sum_{\omega_1^+\times\omega_2^+} D_{kp}(y_{\bar{x}_1\bar{x}_2})^2h_1h_2\\ &+ \sum_{\omega_1^+\times{}^+\omega_2} D_{kp}(y_{\bar{x}_1x_2})^2h_1h_2\\ &+ \sum_{{}^+\omega_1\times\omega_2^+} D_{kp}(y_{x_1\bar{x}_2})^2h_1h_2\\ &+ \sum_{{}^+\omega_1\times{}^+\omega_2} D_{kp}(y_{x_1x_2})^2h_1h_2\Big\}.\end{aligned}$$

$I_h(y)$是变量 $y(x)$, $x = x_i\in\omega$ 的函数. 计算它的一阶导数并令它们在 $i_\alpha = 2, 3, \cdots, N_\alpha - 2$ 的 x 点上等于零,我们得到§5 方程(4)的逼近式:

$$\begin{aligned}(D_1(y_{\bar{x}_1x_1} + \nu_2y_{\bar{x}_2x_2}))_{\bar{x}_1x_1} &+ (D_2(y_{\bar{x}_2x_2} + \nu_1y_{\bar{x}_1x_1}))_{\bar{x}_2x_2}\\ + (D_{kp}y_{\bar{x}_1\bar{x}_2})_{x_1x_2} &+ (D_{kp}y_{\bar{x}_1x_2})_{x_1\bar{x}_2}\\ + (D_{kp}y_{x_1\bar{x}_2})_{\bar{x}_1x_2} &+ (D_{kp}y_{x_1x_2})_{\bar{x}_1\bar{x}_2} = q. \qquad (3)\end{aligned}$$

如果薄板是均匀的，则方程可稍微简化为

$$D_1 y_{\bar{x}_1 x_1 \bar{x}_1 x_1} + D_2 y_{\bar{x}_2 x_2 \bar{x}_2 x_2} + 2D_3 y_{\bar{x}_1 x_1 \bar{x}_2 x_2} = q, \tag{4}$$

其中

$$D_3 = D_1 \nu + 2D_{k\rho}.$$

如果薄板又是各向同性的，$D_1 = D_2 = D_3 = D$，则有如下方程：

$$\Delta_h^2 y = y_{\bar{x}_1 x_1 \bar{x}_1 x_1} + 2y_{\bar{x}_1 x_1 \bar{x}_2 x_2} + y_{\bar{x}_2 x_2 \bar{x}_2 x_2} = q/D. \tag{5}$$

容易验证，在系数和被逼近的解足够光滑的条件下，方程(3)的逼近误差为 $O(h_1^2 + h_2^2)$.

2. 四阶常微分方程连接条件的逼近. 如同 § 5 第二段一样，我们讨论两个杆的系统，第一个杆在未变形时位于 Ox 轴的区间 $[-l, 0]$ 上，而第二个杆位于同一个坐标轴的区间$[0, l]$ 上. 设第一个杆的刚度系数是 B^-，而第二个是 B^+，并且两杆均受强度为 $q(x)$ 的横向荷载作用. 所考虑的杆系平衡位置的形状由 § 5 的方程(5)描述，这里要设第一个杆的 $B = B^-$，第二个杆的 $B = B^+$. 我们假定，在杆的连接点 $x = 0$，杆的挠度函数 $w(x)$满足 § 5 中的连接条件(17)：

$$[w] = 0,\ \alpha[w'] = Bw'',\ [Bw''] = 0,$$
$$[Bw'''] = -\beta w,\ 当\ x = 0. \tag{6}$$

我们的问题是构造这些条件的网格逼近. 为此在区间 $[-l, l]$上引进均匀网格 $\bar{\omega} = \{x = x_i = ih | i = 0, \pm 1, \cdots, \pm N\}$ 并在这个网格上逼近 § 5 中的泛函 (16)：

$$I(w) = \frac{B^{-1}}{2}\int_{-l}^{0}(w'')^2 dx + \frac{B^+}{2}\int_0^l (w'')^2 dx + \left(\frac{\alpha}{2}[w']^2 + \frac{\beta}{2}w^2\right)_{x=0} - \int_{-l}^{l} qw dx, \tag{7}$$

从这个泛函曾得到 § 5 的条件 (17). 用 $\omega = \{x_i | i = 0, \pm 1, \cdots, \pm(N-1)\}$ 表示网格 $\bar{\omega}$ 的内节点的集合，用 $\omega_л = \{x_i | i = -1, -2, \cdots, -(N-1)\}$ 表示区间 $[-l, 0]$ 上网

格的节点的集合，用 $\omega_{\text{п}} = \{x_i | i = 1, 2, \cdots, N-1\}$ 表示区间 $[0, l]$ 上网格内节点的集合. 因为我们只对逼近连接条件感兴趣，为简单起见将设在 $x = \pm l$ 满足简支条件

$$w = w'' = 0, \quad \text{当 } x = \pm l.$$

用梯形公式逼近(7)中出现的积分，考虑到边界条件，我们有

$$\int_{-l}^{l} qw dx \sim \sum_{\omega} q(x) w(x) h,$$

$$\int_{-l}^{0} (w'')^2 dx \sim \sum_{\omega_{\text{л}}} (w'')^2 h + (w''_{\text{л}})^2 \frac{h}{2},$$

$$\int_{0}^{l} (w'')^2 dx \sim \sum_{\omega_{\text{п}}} (w'')^2 h + (w''_{\text{п}})^2 \frac{h}{2},$$

其中

$$w''_{\text{л}} = w''(-0), \quad w''_{\text{п}} = w''(+0).$$

将这些近似式代入(7)，得到

$$I(w) \sim \frac{1}{2}\Big\{B^- \sum_{\omega_{\text{л}}} (w'')^2 h + B^+ \sum_{\omega_{\text{п}}} (w'')^2 h - 2\sum_{\omega} q(x) w(x) h\Big\} + I_0 + \frac{\beta}{2} w^2(0), \quad (8)$$

其中

$$I_0 = \frac{1}{2}\Big\{\frac{hB^{-1}}{2}(w''_{\text{л}})^2 + \frac{hB^+}{2}(w''_{\text{п}})^2 + \alpha[w']^2|_{x=0}\Big\}. \quad (9)$$

当 $x \in \omega_{\text{л}}$ 和 $x \in \omega_{\text{п}}$ 时，将导数 w'' 换成二阶差商

$$w'' \sim w_{\bar{x}x}, \quad x \in \omega_{\text{л}}, \omega_{\text{п}},$$

而在点 $x = 0$ 处导数的逼近方式我们将特别研究.

首先讨论当 α 有限且不为 0 的情况. 根据(6)

$$B^{-1}(w''_{\text{л}})^2 + B^+(w''_{\text{п}})^2 = \left(\frac{1}{B^-} + \frac{1}{B^+}\right)(B^- w''_{\text{л}})^2$$

$$= \left(\frac{1}{B^-} + \frac{1}{B^+}\right)\alpha^2[w']^2|_{x=0}.$$

将这个关系式代入(9)可得

$$I_0 = \frac{\alpha}{2}\left\{1 + \frac{h\alpha}{2}\left(\frac{1}{B^-} + \frac{1}{B^+}\right)\right\}[w']^2. \tag{10}$$

写出导数跃度最简单的逼近式并探讨其误差

$$(w_x - w_{\bar{x}})|_{x=0} = [w']|_{x=0} + \frac{h}{2}(w''_n + w''_\pi) + O(h^2).$$

利用条件(6)的第二式和第三式，我们有

$$(w_x - w_{\bar{x}})|_{x=0} = \left\{1 + \frac{\alpha h}{2}\left(\frac{1}{B^-} + \frac{1}{B^+}\right)\right\} \times [w']|_{x=0} + O(h^2)$$

或

$$[w']|_{x=0} = \left\{1 + \frac{\alpha h}{2}\left(\frac{1}{B^-} + \frac{1}{B^+}\right)\right\}^{-1} \times (w_x - w_{\bar{x}})|_{x=0} + O(h^2).$$

将这个关系式代入(10)，求得

$$I_0 = \frac{\alpha}{2}\left\{1 + \frac{\alpha h}{2}\left(\frac{1}{B^-} + \frac{1}{B^+}\right)\right\}[w']^2|_{x=0} = \frac{\alpha}{2}\left\{1 + \frac{\alpha h}{2}\left(\frac{1}{B^-} + \frac{1}{B^+}\right)\right\}^{-1}(w_x - w_{\bar{x}})^2 + O(h^2).$$

略去量 $O(h^2)$，我们得到(10)式的逼近

$$I_0 \sim \frac{\alpha}{2}\left\{1 + \frac{\alpha h}{2}\left(\frac{1}{B^-} + \frac{1}{B^+}\right)\right\}^{-1}(w_x - w_{\bar{x}})^2. \tag{11}$$

现在考虑极端情况 $\alpha = 0$ 和 $\alpha = \infty$. 如果 $\alpha = 0$，则根据(6)，

$$w''_\pi = w''_n = 0,$$

因此 I_0 等于零. 形式地在(11)中令 $\alpha = 0$，我们得到逼近式 $I_0 \sim 0$. 如果 $\alpha = \infty$，则根据(6)，$[w']|_{x=0} = 0$ 且关系式(9)取形式

$$I_0 = \frac{h}{4}\{B^+(w''_n)^2 + B^-(w''_\pi)^2\}. \tag{12}$$

在(11)中令 $\alpha\to\infty$ 取极限得到

$$I_a \sim \frac{B^+B^-}{h(B^+ + B^-)}(w_x - w_{\bar{x}})^2.$$

通过泰勒公式展开求得

$$\frac{B^+B^-}{h(B^+ + B^-)}(w_x - w_{\bar{x}})^2$$

$$= \frac{hB^+B^-}{4(B^+ + B^-)}(w''_{\text{п}} + w''_{\text{л}})^2 + O(h^3). \qquad (13)$$

由于条件(6)中第三式 $B^+w''_{\text{п}} = B^-w''_{\text{л}}$，从而

$$B^+B^-(w''_{\text{п}} + w''_{\text{л}})^2 = B^+B^-(w''_{\text{п}})^2 + B^+B^-(w''_{\text{л}})^2$$

$$+ (B^+w''_{\text{п}})^2 + (B^-w''_{\text{л}})^2$$

$$= (B^+ + B^-)\{B^+(w''_{\text{п}})^2 + B^-(w''_{\text{л}})^2\}.$$

将这个关系式代入(13)，求得

$$\frac{B^+B^-}{h(B^+ + B^-)}(w_x - w_{\bar{x}})^2$$

$$= \frac{h}{4}\{B^+(w''_{\text{п}})^2 + B^-(w''_{\text{л}})^2\} + O(h^3).$$

把这个关系式和(12)比较，我们看到，当 $\alpha=\infty$ 时逼近式(11)的误差为 $O(h^3)$。

现在将所有近似式代入(8)，得到泛函(7)的网格逼近：

$$I_h(y) = \frac{1}{2}\Big\{B^-\sum_{\omega_{\text{Л}}}(y_{\bar{x}x})^2h + \sum_{\omega_{\text{П}}}(y_{\bar{x}x})^2h$$

$$-2\sum_{\omega} qyh\Big\} + \frac{\alpha}{2}\left\{1 + \frac{\alpha h}{2}\left(\frac{1}{B^-} + \frac{1}{B^+}\right)\right\}^{-1}$$

$$\times (y_x - y_{\bar{x}})^2 + \frac{\beta}{2}y^2(0). \qquad (14)$$

变换(14)中那些与点 $x=0$ 有关的项：

$$\frac{\alpha}{2}\left\{1+\frac{\alpha h}{2}\left(\frac{1}{B^-}+\frac{1}{B^+}\right)\right\}^{-1}(y_x-y_{\bar{x}})^2$$

$$=\frac{\alpha h^2}{2}\left\{1+\frac{\alpha h}{2}\left(\frac{1}{B^-}+\frac{1}{B^+}\right)\right\}^{-1}(y_{\bar{x}x})^2$$

$$=h\frac{B^-B^+}{B^-+B^+}\left\{1-\frac{1}{1+\frac{\alpha h}{2}\left(\frac{1}{B^-}+\frac{1}{B^+}\right)}\right\}(y_{\bar{x}x})^2.$$

引入记号:

$$\widetilde{B}=\begin{cases}B^-, & x\in\omega_{\text{I}},\\ B^+, & x\in\omega_{\text{II}},\\ \dfrac{2B^-B^+}{B^-+B^+}\left\{1-\dfrac{1}{1+\frac{\alpha h}{2}\left(\frac{1}{B^-}+\frac{1}{B^+}\right)}\right\}, & x=0.\end{cases}$$

利用这种记号,(14)将成为

$$I_h(y)=\frac{1}{2}\sum_{\omega}\widetilde{B}(x)(y_{\bar{x}x})^2+\frac{\beta}{2}y^2(0)$$

$$-\sum_{\omega}q(x)y(x)h. \tag{15}$$

泛函(7)的逼近式已建立. $I_h(y)$ 是变量 $y(x)$, $x\in\omega$ 的函数. 将它对 $y(x)$ 微分并令其一阶导数等于 0, 对 x_i, $i=0$, $\pm1,\cdots\pm(N-2)$ 我们得到如下方程:

$$(\widetilde{B}y_{\bar{x}x})_{\bar{x}x}-\beta\delta(x)y=q(x), \tag{16}$$

$\delta(x)$ 是 δ-函数的网格模拟.

对 $x=\pm2h,\pm3h,\cdots,\pm(l-2h)$, 从(16)得到 § 5 方程(5)的通常逼近式

$$y_{\bar{x}x\bar{x}x}=\frac{q(x)}{B^\pm},$$

而对 $x=0$, $\pm h$, 我们有连接条件(6)的逼近式. 现在来讨论这些方程. 为简单起见, 假设 $B^-=B^+=B$, 对 $x=0$, $\pm h$,

从(16)经过一些变换以后求得下列方程：

$$B\left(y_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}x}(0)-\frac{1}{h(1+\alpha h/B)}y_{\bar{x}\bar{x}x}(0)\right.$$
$$\left.-\frac{1}{h^2(1+\alpha h/B)}y_{\bar{x}\bar{x}}(0)\right)=q(-h),$$
$$B\left(y_{\bar{x}x\bar{x}x}(0)+\frac{2}{h^2(1+\alpha h/B)}y_{\bar{x}x}(0)\right)$$
$$+\frac{B}{h}y(0)=q(0), \tag{17}$$
$$B\left(y_{\bar{x}xxx}(0)+\frac{1}{h(1+\alpha h/B)}y_{\bar{x}xx}(0)\right.$$
$$\left.-\frac{1}{h^2(1+\alpha h/B)}y_{xx}(0)\right)=q(h).$$

我们证明，方程(17)的确逼近于连接条件(6)．为此首先将方程(17)写成如下形式：

$$B\left(\frac{y_{\bar{x}xx}-y_{\bar{x}\bar{x}x}}{h}-\frac{1}{h(1+\alpha h/B)}y_{\bar{x}\bar{x}x}\right.$$
$$\left.-\frac{1}{h^2(1+\alpha h/B)}y_{\bar{x}\bar{x}}\right)=q(-h),$$
$$B\left(\frac{y_{xx\bar{x}}-y_{x\bar{x}\bar{x}}}{h}+\frac{2}{h^2(1+\alpha h/B)}y_{\bar{x}x}\right)$$
$$+\frac{\beta}{h}y=q(0), \tag{18}$$
$$B\left(\frac{y_{xxx}-y_{\bar{x}xx}}{h}+\frac{1}{h(1+\alpha h/B)}y_{\bar{x}xx}\right.$$
$$\left.-\frac{1}{h^2(1+\alpha h/B)}y_{xx}\right)=q(h).$$

如果不另外声明，这里各处的自变量都等于零，将所得关系式相加，并将其和乘以 h.

经简化以后得到条件(6)中最后一式的逼近

$$B(y_{xxx} - y_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}}) = -\beta y + 3hq(0) + h^3 q_{\bar{x}x}. \quad (19)$$

将(18)中第一式和第三式写成如下形式

$$\frac{\alpha}{h(1+\alpha h/B)} y_{\bar{x}x} - B\left(\frac{1}{h^2} y_{\bar{x}\bar{x}} + \frac{1}{h} y_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}}\right) = q(-h),$$

$$B\left(\frac{1}{h} y_{xxx} - \frac{1}{h^2} y_{xx}\right) + \frac{\alpha}{h(1+\alpha h/B)} y_{\bar{x}x} = q(h). \quad (20)$$

从方程(20)中第一式减去第二式，并将其差乘以 h^2:

$$B(y_{xx} - y_{\bar{x}\bar{x}}) = hB(y_{xxx} + y_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}}) - h^2(q(h) - q(-h)). \quad (21)$$

这就是条件(6)中第三式的逼近.

最后，将方程(20)改写成以下形式:

$$\frac{\alpha}{h^2(1+\alpha h/B)}(y_x - y_{\bar{x}}) - B\left(\frac{1}{h^2} y_{\bar{x}\bar{x}} + \frac{1}{h} y_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}}\right) = q(-h),$$

$$B\left(\frac{1}{h} y_{xxx} - \frac{1}{h^2} y_{xx}\right) + \frac{\alpha}{h^2(1+\alpha h/B)}(y_x - y_{\bar{x}}) = q(h).$$

将这些关系式相加，并将其和乘以 $h^2/2$，得到条件(6)中第二式的逼近:

$$\frac{\alpha}{1+\alpha h/B}(y_x - y_{\bar{x}}) = \frac{B}{2}(y_{xx} + y_{\bar{x}\bar{x}}) - \frac{Bh}{2}(y_{xxx} - y_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}}) + h^2 q + \frac{h^4}{2} q_{\bar{x}x}. \quad (22)$$

直接验证不难看出，关系式(19)，(21)，(22)最低限度以误差 $O(h^2)$ 逼近条件(6).

3. 四阶偏微分方程连接条件的逼近. 现在对 §5 中方程(1)的连接条件(26)建立逼近式. 为了简化计算，假定在连接条件中 $C^+ = C^- = 0$，$B^+ = B^- = \frac{B}{2}$，而在方程(1)中 $D_{\mathrm{I}} = D_{\mathrm{II}}$，和前面一样，这里 $v_{\mathrm{I}} = v(-0, x_2)$，$v_{\mathrm{II}} = v(+0, x_2)$. 在

作了这些假设以后，§5 的条件(26)具有形式

$$
\begin{aligned}
&[w]=0,\quad \alpha\left[\frac{\partial w}{\partial x_1}\right]=D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right),\\
&D\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right]=0,\\
&D\left[\frac{\partial^3 w}{\partial x_1^3}+(2-\nu)\frac{\partial^3 w}{\partial x_1\partial x_2^2}\right]\\
&\quad=-\beta w-B\frac{\partial^4 w}{\partial x_2^4},\ x_1=0.
\end{aligned}
\tag{23}
$$

条件(23)的网格模拟仍然用逼近泛函的方法来构造．为此我们转入讨论 §5 的泛函 (23)，(24)，从这个泛函曾得出 §5 的条件(26)，根据我们所作的假设，将它改写成如下形式：

$$
I(w)=W-\int_{-l_1}^{l_1}\int_0^{l_2}q(x)\,w\,dx_1dx_2, \tag{24}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
W=W^{+}+W^{-}+\frac{1}{2}\int_0^{l_2}\left\{\alpha\left[\frac{\partial w}{\partial x_1}\right]^2+\beta w^2\right.\\
\left.+B\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)\right\}_{x_1=0}dx_2,
\end{aligned}
\tag{25}
$$

而

$$
\begin{aligned}
W^{+}=\frac{D}{2}\int_0^{l_1}\int_0^{l_2}\left\{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)^2+2\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right.\\
\left.+2(1-\nu)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\partial x_2}\right)^2\right\}dx_1dx_2,
\end{aligned}
\tag{26}
$$

$$
\begin{aligned}
W^{-}=\frac{D}{2}\int_{-l_1}^{0}\int_0^{l_2}\left\{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)^2\right.\\
\left.+2\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}+2(1-\nu)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\partial x_2}\right)^2\right\}\\
\times dx_1dx_2.
\end{aligned}
\tag{27}
$$

在区域 $\bar{\bar{G}} = \{x = (x_1, x_2) | -l_1 \leqslant x_1 \leqslant l_1, 0 \leqslant x_2 \leqslant l_2\}$ 中引入矩形均匀网格 $\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2 = \{x = (x_1, x_2) | x_\alpha \in \bar{\omega}_\alpha, \alpha = 1, 2\}$，其中 $\bar{\omega}_1$ 和 $\bar{\omega}_2$ 分别是区间 $[-l_1, l_1]$ 和 $[0, l_2]$ 上的网格，并且 $\bar{\omega}_1 = \bar{\omega}_{1,л} \cup \bar{\omega}_{1,п}$，而

$$\bar{\omega}_{1,л} = \{x_1 | x_1 = i_1 h_1, i_1 = 0, -1, \cdots, -N_1\},$$

$$\bar{\omega}_{1,п} = \{x_1 | x_1 = i_1 h_1, i_1 = 0, 1, \cdots, N_1\}.$$

波 ω_α 是网格 $\bar{\omega}_\alpha$ 的内节点的集合，而 $\omega_{1,л}(\omega_{1,п})$ 是网格 $\bar{\omega}_{1,л}(\bar{\omega}_{1,п})$ 的内节点的集合.

引入记号

$$\omega = \omega_1 \times \omega_2, \quad \omega_л = \omega_{1,л} \times \omega_2, \quad \omega_п = \omega_{1,п} \times \omega_2,$$

$$\dot{\gamma} = \omega \backslash \{\omega_л \cup \omega_п\}.$$

再令

$$\omega^+_{1,л} = \omega_1 \backslash \omega_{1,п}, \quad \omega^+_{1,п} = \bar{\omega}_1 \backslash \bar{\omega}_{1,л}, \quad {}^+\omega_{1,л} = \bar{\omega}_1 \backslash \bar{\omega}_{1,п},$$

$${}^+\omega_{1,п} = \omega_1 \backslash \omega_{1,л}.$$

因为此刻我们只对逼近连接条件(23)感兴趣，所以为简单起见，假设在区域 G 的边界上函数 $w(x)$ 满足 §5 的条件(34)，即

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial n^2} = 0.$$

将(24)—(27)中的积分用求积公式逼近．用梯形公式代替(24)中最后一项积分和(26)，(27)的前三项积分；并用单边矩形积分公式的线性组合逼近 (26) 及 (27) 中的最后一个积分.

注意到函数 $w(x)$ 的边界条件，我们有

$$\int_{-l}^{l_1}\int_0^{l_2} qw dx_1 dx_2 \sim \sum_{\omega} qwh_1h_2,$$

$$W^-(w) \sim \frac{D}{2}\sum_{\omega_л}\left\{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)^2\right.$$

$$+ 2\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\Bigg\} h_1 h_2 + \frac{(1-\nu) D}{4}$$

$$\times \Bigg\{ \sum_{\omega_{1,\Pi}^{+} \times \omega_2^{+}} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2}\right)^2 h_1 h_2 + \sum_{+\omega_{1,\Pi} \times \omega_2^{+}} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2}\right)^2$$

$$\times h_1 h_2 + \sum_{\omega_{1,\Pi}^{+} \times {}^{+}\omega_2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2}\right)^2 h_1 h_2$$

$$+ \sum_{+\omega_{1,\Pi} \times {}^{+}\omega_2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2}\right)^2 h_1 h_2 \Bigg\} + \frac{D}{2} \sum_{\gamma} \frac{h_1 h_2}{2}$$

$$\times \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right) + 2\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right\},$$

$$W^{+}(w) \sim \frac{D}{2} \sum_{\omega_{\Pi}} \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)^2 + 2\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right\}$$

$$\times h_1 h_2 + \frac{(1-\nu) D}{4} \Bigg\{ \sum_{\omega_{1,\Pi}^{+} \times \omega_2^{+}} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2}\right)^2 h_1 h_2$$

$$+ \sum_{+\omega_{1,\Pi} \times \omega_2^{+}} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2}\right)^2 h_1 h_2 + \sum_{\omega_{1,\Pi}^{+} \times {}^{+}\omega_2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2}\right)^2$$

$$\times h_1 h_2 + \sum_{+\omega_{1,\Pi} \times {}^{+}\omega_2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2}\right)^2 h_1 h_2 \Bigg\}$$

$$+ \frac{D}{2} \sum_{\gamma} \frac{h_1 h_2}{2} \Bigg\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right)^2$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)^2 + 2\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \Bigg\}.$$

此外假设

$$\frac{1}{2} \int_0^{l_2} \left\{ B \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)^2 + \alpha \left[\frac{\partial w}{\partial x_1}\right]^2 + \beta w^2 \right\} dx_2$$

$$\sim \frac{1}{2} \sum_{\gamma} \left\{ B \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)^2 + \alpha \left[\frac{\partial w}{\partial x_1}\right]^2 + \beta w^2 \right\} h_2.$$

用二阶差商代替 $\omega_{\text{Л}}$ 和 $\omega_{\text{П}}$ 的求和式中出现的二阶导数

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x_\alpha^2} \sim w_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}.$$

每个和式中的混合导数按各自的方式写出．设

$$\begin{aligned}
W_h^-(y) = {} & \frac{D}{2}\sum_{\omega_{\text{Л}}}\{(y_{\bar{x}_1x_1})^2+(y_{\bar{x}_2x_2})^2+2\nu y_{\bar{x}_1x_1}y_{\bar{x}_2x_2}\}h_1h_2 \\
& + \frac{D(1-\nu)}{4}\Big\{\sum_{\omega_{1,\text{Л}}^+\times\omega_2^+} + (y_{\bar{x}_1\bar{x}_2})^2h_1h_2 \\
& + \sum_{{}^+\omega_{1,\text{Л}}\times\omega_2^+}(y_{x_1\bar{x}_2})^2h_1h_2+\sum_{\omega_{1,\text{Л}}^+\times{}^+\omega_2}(y_{\bar{x}_1x_2})^2h_1h_2 \\
& + \sum_{{}^+\omega_{1,\text{Л}}\times{}^+\omega_2}(y_{x_1x_2})^2h_1h_2\Big\},
\end{aligned} \tag{28}$$

$$\begin{aligned}
W_h^+(y) = {} & \frac{D}{2}\sum_{\omega_{\text{П}}}\{(y_{\bar{x}_1x_1})^2+(y_{\bar{x}_2x_2})^2+2\nu y_{\bar{x}_1x_1}y_{\bar{x}_2x_2}\}h_1h_2 \\
& + \frac{D(1-\nu)}{4}\Big\{\sum_{\omega_{1,\text{П}}^+\times\omega_2^+}(y_{\bar{x}_1\bar{x}_2})^2h_1h_2 \\
& + \sum_{{}^+\omega_{1,\text{П}}\times\omega_2^+}(y_{x_1\bar{x}_2})^2h_1h_2+\sum_{\omega_{1,\text{П}}^+\times{}^+\omega_2}(y_{\bar{x}_1x_2})^2h_1h_2 \\
& + \sum_{{}^+\omega_{1,\text{П}}\times{}^+\omega_2}(y_{x_1x_2})^2h_1h_2\Big\}.
\end{aligned} \tag{29}$$

现在我们只需在和 $\sum_{\gamma} A(\omega)h_2$ 中逼近导数，这里

$$\begin{aligned}
A(w) = {} & \frac{Dh_1}{4}\left\{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right)_{\text{Л}}^2+\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)^2+2\nu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right)_{\text{Л}}\right. \\
& \times\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}+\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right)_{\text{П}}^2+\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)^2 \\
& \left.+2\nu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right)_{\text{П}}\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right\}+\frac{1}{2}\left\{\alpha\left[\frac{\partial w}{\partial x_1}\right]^2\right.
\end{aligned}$$

$$+ B\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)^2 + \beta w^2\Big\}. \tag{30}$$

设 α 有界且不等于零，这时从(23)求得

$$\frac{D}{2}\left\{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)_л^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)_п^2\right\}$$
$$= \frac{\alpha^2}{D}\left[\frac{\partial w}{\partial x_1}\right]^2.$$

将这个关系式代入(30)，有

$$A(w) = \frac{\alpha}{2}\left(1 + \frac{\alpha h_1}{D}\right)\left[\frac{\partial w}{\partial x_1}\right]^2 + \frac{1}{2}\{B + h_1 D(1-\nu^2)\}$$
$$\times\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)^2 + \frac{\beta}{2}w^2. \tag{31}$$

我们来写出导数跃度 $[\partial w/\partial x_1]_{x_1=0}$ 的最简单逼近式并讨论它的误差

$$(w_{x_1} - w_{\bar{x}_1})|_{x_1=0} = \left[\frac{\partial w}{\partial x_1}\right]_{x_1=0} + \frac{h_1}{2}\left\{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right)_п\right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right)_л\right\} + O(h_1^2) = \left[\frac{\partial w}{\partial x_1}\right]\Big|_{x_1=0}$$
$$+ \frac{h_1}{2}\left\{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)_п + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)_л\right\}$$
$$- h_1\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\Big|_{x_1=0} + O(h^2).$$

从(23)求得

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)_п + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)_л$$
$$= \frac{2\alpha}{D}\left[\frac{\partial w}{\partial x_1}\right]\Big|_{x_1=0},$$

因此

$$(w_{x_1} - w_{\bar{x}_1})|_{x_1=0} = \left(1 + \frac{\alpha h_1}{D}\right)\left[\frac{\partial w}{\partial x_1}\right]_{x_1=0}$$

$$- h_1 \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\bigg|_{x_1=0} + O(h_1^2).$$

所以

$$\left[\frac{\partial w}{\partial x_1}\right]\bigg|_{x_1=0} = \frac{1}{1 + \alpha h_1/D}\left\{(w_{x_1} - w_{\bar{x}_1})|_{x_1=0}\right.$$

$$\left. + h_1 \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\bigg|_{x_1=0} + O(h_1^2)\right\}.$$

将这个表达式代入(31)并用二阶差商代替 $\partial^2 w/\partial x_2^2$，得到

$$A(w) = \frac{\alpha}{2}\frac{1}{1 + \alpha h_1/D}\{(w_{x_1} - w_{\bar{x}_1}) + h_1 \nu w_{\bar{x}_2 x_2}$$

$$+ O(h_1^2 + h_2^2)\} + \frac{1}{2}\{B + h_1 D(1 - \nu^2)\}$$

$$\times (w_{\bar{x}_2 x_2})^2 + \frac{\beta}{2} w^2 + O(h_2^2). \tag{32}$$

考虑极端情况 $\alpha = 0$ 和 $\alpha = \infty$. 在(30)中令 $\alpha = 0$ 并注意到(23)，我们求得

$$A(w) = \frac{1}{2}\{B + h_1 D(1 - \nu^2)\}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)^2 + \frac{\beta}{2} w^2.$$

但(32)中的主要项当 $\alpha = 0$ 时恰好以误差 $O(h_2^2)$ 逼近这个表达式. 现在在(30)中令 $\alpha \to \infty$ 并取极限，再次注意到 (23)，求得

$$A(w) = \frac{D h_1}{2}\left\{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right)^2 + 2\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right\}$$

$$+ \frac{1}{2}\left\{\left(B + \frac{D h_1}{2}\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)^2 + \beta w^2\right\}.$$

关系式(32)在 $\alpha \to \infty$ 时有形式

$$A(w) = \frac{D h_1}{2}\{w_{\bar{x}_1 x_1} + \nu w_{\bar{x}_2 x_2} + O(h_1 + h_2^2/h_1)\}^2$$

$$+ \frac{1}{2}\{B + h_1 D(1 - \nu^2)\}(w_{\bar{x}_2 x_2})^2$$

$$+\frac{\beta}{2}w^2+O(h_2^2),$$

因此，它的主要项以误差 $O(h_1^2+h_2^2)$ 逼近(30).

于是

$$W_h^0(y)=\frac{1}{2}\sum_{\gamma}h_2\left\{\frac{\alpha}{1+\alpha h_1/D}(y_{x_1}-y_{\bar{x}_1})^2\right.$$
$$+\left[B+h_1D\left(1-\frac{\nu^2}{1+\alpha h_1/D}\right)\right](y_{\bar{x}_2x_2})^2$$
$$\left.+\frac{2h_1\alpha\nu}{1+\alpha h_1/D}(y_{x_1}-y_{\bar{x}_1})y_{\bar{x}_2x_2}\right\}. \tag{33}$$

这时(24)中的泛函 $I(w)$ 的网格逼近将有如下形式:

$$I_h(y)=W_h(y)-\sum_{\omega}qyh_1h_2, \tag{34}$$

其中

$$W_h(y)=W_h^-(y)+W_h^+(y)+W_h^0(y),$$

而 $W_h^-(y)$, $W_h^+(y)$ 及 $W_h^0(y)$ 由关系式 (28), (29), (33) 确定.

将 $W_h^0(y)$稍加变换，注意到

$$(y_{x_1}-y_{\bar{x}_1})^2=h_1^2(y_{\bar{x}_1x_1})^2,$$
$$\frac{\alpha h_1}{1+\alpha h_1/D}=D\left(1-\frac{1}{1+\alpha h_1/D}\right),$$

我们得到 $W_h^0(y)$ 的表达式

$$W_h^0(y)=\frac{h_1}{2}\sum_{\gamma}h_2D\left\{\left(1-\frac{1}{1+\alpha h_1/D}\right)(y_{\bar{x}_1x_1})^2\right.$$
$$+\left(1-\frac{\nu^2}{1+\alpha h_1/D}+\frac{B}{Dh_1}\right)(y_{\bar{x}_2x_2})^2$$
$$\left.+2\left(1-\frac{1}{1+\alpha h_1/D}\right)\nu y_{\bar{x}_1x_1}y_{\bar{x}_2x_2}\right\}.$$

将 $W_h^0(y)$ 中求和符号下的表达式与 $W_h^\pm(y)$中对 $\omega_{\pi(\text{II})}$ 求和符号下的表达式加以比较，它们的区别仅在于差商的系数.

引入记号

$$D_1 = D\left(1 - \frac{h_1}{1 + \alpha h_1/D}\delta(x_1)\right),$$

$$D_2 = D\left(1 - \left(\frac{\nu^2 h_1}{1 + \alpha h_1/D} - \frac{B}{D}\right)\delta(x_1)\right), \qquad (35)$$

$$D_{kp} = D\frac{1-\nu}{2},$$

其中 $\delta(x_1)$ 是 δ-函数的网格模拟

$$\delta(x_1) = \begin{cases} h_1^{-1}, & x_1 = 0, \\ 0 & x_1 \in \omega_1, \quad x_1 \neq 0. \end{cases}$$

在新的记号下 $W_h(y)$ 具有形式

$$W_h(y) = \frac{1}{2}\sum_{\omega} h_1 h_2 \{D_1(y_{\bar{x}_1 x_1})^2 + D_2(y_{\bar{x}_2 x_2})^2 + 2D_1 \nu y_{\bar{x}_1 x_1} y_{\bar{x}_2 x_2}\} + \frac{D_{kp}}{2}\left\{\sum_{\omega_1^+ \times \omega_2^+} h_1 h_2 (y_{\bar{x}_1 \bar{x}_2})^2 + \sum_{{}^+\omega_1 \times \omega_2^+} h_1 h_2 (y_{x_1 \bar{x}_2})^2 + \sum_{\omega_1^+ \times {}^+\omega_2} h_1 h_2 (y_{\bar{x}_1 x_2})^2 + \sum_{{}^+\omega_1 \times {}^+\omega_2} h_1 h_2 (y_{x_1 x_2})^2\right\} + \frac{1}{2}\sum_{\omega} h_1 h_2 \beta\delta(x_1) y^2. \qquad (36)$$

(34)中的 $I_h(y)$ 是变量 $y(x)$, $x \in \omega$ 的函数. 当 $x_1 \neq \pm(l_1 - h_1)$, $x_2 \neq h_2$, $l_2 - h_2$ 时将它对 $y(x)$ 微分并令导数等于零,得到如下方程:

$$(D_1 y_{\bar{x}_1 x_1})_{\bar{x}_1 x_1} + (D_2 y_{\bar{x}_2 x_2})_{\bar{x}_2 x_2} + (D_1 \nu y_{\bar{x}_1 x_1})_{\bar{x}_2 x_2} + (D_1 \nu y_{\bar{x}_2 x_2})_{\bar{x}_1 x_1} + 4D_{kp} y_{\bar{x}_1 x_1 \bar{x}_2 x_2} + \beta\delta(x_1) y = q(x),$$
$$x_1 \neq \pm(l_1 - h_1),\ x_2 \neq h_2,\ l_2 - h_2. \qquad (37)$$

在(37)中令 $x_1 = 0$, $\pm h_1$, 我们得到连接条件(23)的网格逼

近．经过一些变换之后上述方程成为：

$$D\left\{ y_{\bar{x}_1x_1\bar{x}_1x_1} - \frac{1}{h_1(1+\alpha h_1/D)} y_{\bar{x}_1x_1x_1} - \frac{1}{h_1^2(1+\alpha h_1/D)}\right.$$

$$\times y_{\bar{x}_1x_1} + y_{\bar{x}_2x_2\bar{x}_2x_2} + 2y_{\bar{x}_1x_1\bar{x}_2x_2} - \frac{\nu}{h_1(1+\alpha h_1/D)}$$

$$\left.\times y_{x_1\bar{x}_2x_2} - \frac{\nu}{h_1^2(1+\alpha h_1/D)} y_{\bar{x}_2x_2}\right\} = q,$$

$$x = (-h_1, x_2),$$

$$D\left\{y_{\bar{x}_1x_1\bar{x}_1x_1} + \frac{2}{h_1^2(1+\alpha h_1/D)} y_{\bar{x}_1x_1} + \left(1 - \frac{\nu^2}{1+\alpha h_1/D}\right.\right.$$

$$\left. + \frac{B}{Dh_1}\right) y_{\bar{x}_2x_2\bar{x}_2x_2} + \left(2 - \frac{1}{1+\alpha h_1/D}\right) y_{\bar{x}_1x_1\bar{x}_2x_2}$$

$$\left. + \frac{2\nu y_{\bar{x}_2x_2}}{h_1^2(1+\alpha h_1/D)} + \frac{B}{h_1} y\right\} = q, \qquad x = (0, x_2),$$

$$D\left\{ y_{\bar{x}_1x_1\bar{x}_1x_1} + \frac{1}{h_1(1+\alpha h_1/D)} y_{\bar{x}_1\bar{x}_1x_1}\right.$$

$$- \frac{1}{h_1^2(1+\alpha h_1/D)} y_{\bar{x}_1x_1} + y_{\bar{x}_2x_2\bar{x}_2x_2} + 2y_{x_1\bar{x}_1\bar{x}_2x_2}$$

$$\left. + \frac{\nu}{h_1(1+\alpha h_1/D)} y_{\bar{x}_1\bar{x}_2x_2} - \frac{\nu}{h_1^2(1+\alpha h_1/D)} y_{\bar{x}_2x_2}\right\}$$

$$= q, \qquad x = (h_1, x_2).$$

正如方程(18)的情况那样，这些方程可以变换形式，由此可得出，所构造的方程以误差 $O(h_1^2 + h_2^2)$ 逼近于条件(23)．

4. 四阶常微分方程边界条件的逼近．我们将讨论 §5 中方程(5)的边界条件(28)的逼近，不过代替齐次条件而考虑非齐次条件：

$$-Bw'' + \alpha(w' - w_0') = M_0,$$

$$Bw''' + \beta(w - w_0) = Q_0, \quad x = 0. \tag{38}$$

这里 w_0、w'_0、M_0 和 Q_0 都是给定常数；（w_0 和 w'_0 是为方便而引入的）.

设在区间 $[0, l]$ 上讨论 § 5 的方程(5)，并且设它的解在 $x = l$ 满足条件 $w(l) = w''(l) = 0$，而在 $x = 0$ 满足条件(38)，考虑泛函

$$I(w) = W(w) - \int_0^l qwdx - Q(\beta)w(0) - M(\alpha)w'(0), \tag{39}$$

其中

$$W(w) = \frac{B}{2}\int_0^l (w'')^2 dx + \frac{\alpha}{2}(w'(0))^2 + \frac{\beta}{2}w^2(0), \tag{40}$$

$$Q(\beta) = Q_0 + \beta w_0,\ M(\alpha) = M_0 + \alpha w'_0.$$

容易验证，边界条件(38)和§5的方程(5)是使泛函(39)的一阶变分为零的必要条件.

我们用逼近泛函(39)的方法来构造边界条件(38)的差分模拟. 设 ω 是区间$[0, l]$上的均匀网格. 用梯形积分公式逼近(39)，(40)中出现的积分并考虑到 $x = l$ 的边界条件：

$$\int_0^l qwdx \sim \sum_\omega qwh + \frac{q(0)\,w(0)}{2}h,$$

$$\frac{B}{2}\int_0^l (w'')^2 dx \sim \frac{B}{2}\sum_\omega (w'')^2 h + \frac{B}{2} \times (w''(0))^2 \frac{h}{2}.$$

对 ω 求和的和式中二阶导数用二阶差商代替

$$w'' \sim w_{\bar{x}x}.$$

于是有

$$I(w) \sim \frac{B}{2}\sum_{\omega}(w_{\bar{x}x})^2 h - \sum_{\omega} qwh + \frac{1}{2}$$

$$\times \left(\frac{Bh}{2}(w''(0))^2 + \alpha(w'(0))^2 - 2M(\alpha)w'(0)\right)$$

$$+ \frac{1}{2}(\beta w^2(0) - qhw(0) - 2Q(\beta)w(0)).$$

我们来构造下述表达式的逼近:

$$A(w) = \frac{1}{2}\left\{\frac{Bh}{2}(w''(0))^2 + \alpha(w'(0))^2 - 2M(\alpha)w'(0)\right\}.$$

根据(38)有

$$w''(0) = \frac{\alpha w'(0) - M(\alpha)}{B},$$

因此

$$A(w) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\alpha h}{2B}\right)[\alpha(w'(0))^2 - 2M(\alpha)w'(0)] + hM^2(\alpha)/(4B). \tag{41}$$

将(41)中的一阶导数用右差商逼近

$$w_x = w' + \frac{h}{2}w'' + O(h^2).$$

注意到边界条件(38)中的第一式,我们求得

$$w_x = \left(1 + \frac{\alpha h}{2B}\right)w' - \frac{h}{2B}M(\alpha) + O(h^2),$$

或

$$w'(0) = \frac{1}{1 + \alpha h/(2B)}\left(w_x + \frac{h}{2B}M(\alpha)\right) + O(h^2).$$

将这个关系式代入(41)并略去量 $O(h^2)$，得到要求的 $A(w)$ 的逼近式:

$$A_h(w) = \frac{1}{2}\frac{1}{1 + \alpha h/(2B)}(\alpha(w_x)^2 - 2M(\alpha)w_x)$$

$$- \frac{hM^2(\alpha)}{4B(1+\alpha h/(2B))}.$$

这样，泛函 $I(w)$ 的网格逼近取形式

$$I_h(y) = \frac{B}{2}\sum_{\omega}(y_{\bar{x}x})^2 h - \sum_{\omega} qyh$$
$$+ \frac{1}{2(1+\alpha h/(2B))}(\alpha(y_x)^2 - 2M(\alpha)y_x)|_{x=0}$$
$$+ \frac{1}{2}(\beta y^2(0) - qhy(0) - 2Q(\beta)y(0))$$
$$- \frac{hM^2(\alpha)}{4B(1+\alpha h/(2B))}. \tag{42}$$

现在将(42)对 $y(0)$ 和 $y(h)$ 微分并令其导数等于0，得到边界条件(38)的如下逼近式：

$$-\frac{\alpha}{h(1+\alpha h/(2B))}y_x + \frac{1}{h}By_{\bar{x}x} + \beta y$$
$$+ \frac{M(\alpha)}{h(1+\alpha h/(2B))} - Q(\beta)$$
$$- \frac{q(0)h}{2} = 0,$$

$$-\frac{B}{h}y_{\bar{x}x} + By_{\bar{x}xx} + \frac{\alpha y_x}{h(1+\alpha h/(2B))}$$
$$- \frac{M(\alpha)}{h(1+\alpha h/(2B))} - hq(h) = 0. \tag{43}$$

把这些关系式相加，得到条件(38)第二式的逼近；第一个关系式乘上 $-h$，得到条件(38)第一式的逼近

$$\left.\begin{aligned}
&-By_{\bar{x}x} + \frac{\alpha}{1+\alpha h/(2B)}(y_x - w_0') - h\beta(y - w_0) \\
&\quad = \frac{M_0}{1+\alpha h/(2B)} - hQ_0 - \frac{h^2 q(0)}{2}, \\
&By_{\bar{x}xx} + \beta(y - w_0) \\
&\quad = Q_0 + h\left(\frac{q(0)}{2} + q(h)\right), \quad x = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{44}$$

容易验证,对于有界的 β 和任意的 α, 条件(44)以误差 $O(h^2)$ 逼近条件(38).

如果 $\beta=\infty$, 则从(43)求得

$$y=w_0,\ x=0,$$

而这就是在这种情况下条件(38)之一的逼近式.

5. 四阶偏微分方程边界条件的逼近. 设在区域 $G=\{x=(x_1,x_2)\,|\,0<x_\alpha<l_\alpha,\ \alpha=1,2\}$ 中解 §5 的方程(1)

$$D\Delta^2 w=q,\qquad x\in G, \tag{45}$$

在 $x_1=0$ 上满足 §5 (31) 类型的非齐次边界条件. (其中 $C=0$):

$$\begin{aligned}
&\alpha\frac{\partial w}{\partial x_1}=D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)+M,\ x_1=0,\\
&D\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x_1^3}+(2-\nu)\frac{\partial^3 w}{\partial x_1\partial x_2^2}\right)\\
&\quad=-\beta w-B\frac{\partial^4 w}{\partial x_2^4}+Q,\ x_1=0,
\end{aligned} \tag{46}$$

而在 $x_1=l_1$ 及 $x_2=0,l_2$ 上满足 §5 (34) 类型的边界条件:

$$\begin{aligned}
w(x_1,0)&=w(l_1,x_2)=w(x_1,l_2)=\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}(l_1,x_2)\\
&=\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}(x_1,l_2)=\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}(x,0)=0.
\end{aligned} \tag{47}$$

根据 §5 的(37)式,当 $\alpha\neq\infty$ 时在区域的角点 $(0,0)$, $(0,l_2)$ 应当满足相容性条件,在我们所讨论的情况中就是

$$B\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}=0,\qquad x_1=0,\ x_2=0,l_2. \tag{48}$$

我们构造边界条件(46)的网格模拟. 用逼近泛函的办法来进行.

不难验证, 问题 (45)—(48) 的解使如下泛函达到极小

值:

$$I(w) = W - \int_0^{l_1}\int_0^{l_2} q(x)\, w dx - \int_0^{l_2}\left\{M(x_2)\frac{\partial w}{\partial x_1} + Q(x_2)w\right\}\Big|_{x_1=0} dx_2, \quad (49)$$

其中

$$W = \mathring{W} + W_1,$$

$$\mathring{W}(w) = \frac{D}{2}\int_0^{l_1}\int_0^{l_2}\left\{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)^2 + 2\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + 2(1-\nu) \times\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2}\right)^2\right\} dx_1 dx_2,$$

$$W_1(w) = \frac{1}{2}\int_0^{l_2}\left\{B\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)^2 + \alpha\left(\frac{\partial w}{\partial x_1}\right)^2 + \beta w^2\right\}\Big|_{x_1=0} dx_2, \quad (50)$$

这就是我们将在均匀的矩形网格 $\bar\omega = \bar\omega_1 \times \bar\omega_2$ 上逼近的泛函. 这种类型的泛函我们已经逼近过，因此利用边界条件(47),立即写出:

$$\int_0^{l_1}\int_0^{l_2} q(x)\, w(x) dx_1 dx_2 \sim \sum_{\omega} q w h_1 h_2 + \sum_{\omega_2}\frac{h_1}{2} h_2 q w|_{x_1=0},$$

$$\int_0^{l_2}\left\{M\frac{\partial w}{\partial x_1} + Q w\right\}\Big|_{x_1=0} dx_2 \sim \sum_{\omega_2}\left(M\frac{\partial w}{\partial x_1} + Q w\right)\Big|_{x_1=0} h_2. \quad (51)$$

其次,注意到相容性条件(48),

$$\mathring{W} \sim \frac{D}{2} \sum_{\omega} \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right\} h_1 h_2$$
$$+ D(1-\nu) \sum_{\omega_1^+ \times \omega_2^+} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 h_1 h_2 + \frac{D}{2} \sum_{\omega_2} \frac{h_1 h_2}{2}$$
$$\times \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right\} \bigg|_{x_1=0},$$
$$W_1 \sim \frac{1}{2} \sum_{\omega_2} \left\{ B \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right)^2 + \alpha \left(\frac{\partial w}{\partial x_1} \right) + \beta w^2 \right\} \bigg|_{x_1=0} h_2. \tag{52}$$

在关系式(52)的第一式中，将求和号 $\sum\limits_{\omega}$ 下的导数用差商 $w_{x_\alpha x_\alpha}$，$\alpha=1,2$ 代替，混合导数用差商 $w_{\bar{x}_1\bar{x}_2}$ 代替并记

$$\mathring{W}^h(w) = \frac{D}{2} \sum_{\omega} \{ (w_{\bar{x}_1 x_1})^2 + (w_{\bar{x}_2 x_2})^2$$
$$+ 2\nu w_{\bar{x}_1 x_1} w_{\bar{x}_2 x_2} \} h_1 h_2 + D(1-\nu)$$
$$\times \sum_{\omega_1^+ \times \omega_2^+} (w_{\bar{x}_1 \bar{x}_2})^2 h_1 h_2. \tag{53}$$

我们分别研究(51)，(52)中符号 $\sum\limits_{\omega_2}$ 下的导数的逼近. 从(51)和(52)式对 ω_2 求和的式组成表达式

$$I_1(w) = \frac{1}{2} \sum_{\omega_2} h_2 \left\{ B \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right)^2 + \alpha \left(\frac{\partial w}{\partial x_1} \right)^2 \right.$$
$$+ \beta w^2 + \frac{D h_1}{2} \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right)^2 \right.$$
$$\left. + (1-\nu^2) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right)^2 \right] - 2M \frac{\partial w}{\partial x_1}$$
$$\left. - 2Qw - h_1 q w \right\} \bigg|_{x_1=0}, \tag{54}$$

它以求积公式的形式包含在泛函 $I(w)$ 的逼近式中. (54)中对 x_2 的二阶导数的逼近没有困难，所以我们把注意力集中于

逼近表达式

$$A(w)=\alpha\left(\frac{\partial w}{\partial x_1}\right)^2+\frac{Dh_1}{2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)^2$$
$$-2M\frac{\partial w}{\partial x_1}.$$

利用边界条件(46)的第一式，得到

$$A(w)=\alpha\left(\frac{\partial w}{\partial x_1}\right)^2+\frac{h_1}{2D}\left(\alpha\frac{\partial w}{\partial x_1}-M\right)^2-2M\frac{\partial w}{\partial x_1}$$
$$=\left(1+\frac{h_1\alpha}{2D}\right)\left[\alpha\left(\frac{\partial w}{\partial x_1}\right)^2-2M\frac{\partial w}{\partial x_1}\right]+\frac{h_1}{2D}M^2.$$

现在 $A(w)$ 只是用一阶导数 $\partial w/\partial x_1$ 表示，而一阶导数的逼近方法我们已多次讲过．将边界条件(64)第一式中的二阶导数 $\partial^2 w/\partial x_1^2$ 代入到展开式

$$w_{x_1}=\frac{\partial w}{\partial x_1}+\frac{h_1}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}+O(h_1^2),\qquad x_1=0$$

得到

$$w_{x_1}=\left(1+\frac{h_1\alpha}{2D}\right)\frac{\partial w}{\partial x_1}-\frac{h_1\nu}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}$$
$$-\frac{h_1M}{2D}+O(h_1^2).$$

由此求得

$$\frac{\partial w}{\partial x_1}=\left(1+\frac{h_1\alpha}{2D}\right)^{-1}\left[w_{x_1}+\frac{h_1\nu}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right.$$
$$\left.+\frac{h_1M}{2D}+O(h_1^2)\right],$$

因此

$$A(w)=\alpha\left(1+\frac{h_1\alpha}{2D}\right)^{-1}\left[w_{x_1}+\frac{h_1\nu}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}+\frac{h_1M}{2D}\right.$$
$$\left.+O(h_1^2)\right]^2-2M\left[w_{x_1}+\frac{h_1\nu}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right.$$

$$+\frac{h_1M}{2D}+O(h_1^2)\Big]+\frac{h_1}{2D}M^2.$$

将 $A(w)$ 的这个表达式代入 (54)，用二阶差商 $w_{\bar{x}_2x_2}$ 代替对 x_2 的二阶导数并略去由 $O(h_1^2)$ 表示的项．将所得的表达式记为 $I_1^h(w)$，即

$$I_1^h(w)=\frac{1}{2}\sum_{\omega_2}h_2\Big\{B(w_{\bar{x}_2x_2})^2+\beta w^2+\frac{Dh_1}{2}(1-\nu^2)(w_{\bar{x}_2x_2})^2+\frac{\alpha}{1+\frac{h_1\alpha}{2D}}\left(w_{x_1}+\frac{h_1\nu}{2}w_{\bar{x}_2x_2}+\frac{h_1M}{2D}\right)^2-2Qw-h_1qw-2M\left(w_{x_1}+\frac{h_1\nu}{2}w_{\bar{x}_2x_2}\right)-\frac{h_1}{2D}M^2\Big\}. \tag{55}$$

这样，我们将用网格泛函

$$I^h(w)=\mathring{W}^h(w)+I_1^h(w)+\sum_{\omega}qwh_1h_2 \tag{56}$$

逼近泛函 (49)，(50)，其中 $\mathring{W}^h(w)$ 和 $I_1^h(w)$ 分别由 (53) 和 (55)确定．

为了构造边界条件 (46) 的网格逼近，需要将网格泛函 (56) 对 $w(x_1,x_2)$，$x_1=0$，h_1 且 $x_2\in\hat{\omega}_2$ 微分，然后令所得表达式等于零．将得到的关系式乘上 $h_1h_2^{-1}$ 以后，我们有 ($x_1=0$，$x_2\in\hat{\omega}_2$)：

$$D(w_{\bar{x}_1x_1}+\nu w_{\bar{x}_2x_2})^{(+1_1)}+2D(1-\nu)h_1w_{x_1\bar{x}_2x_2}+h_1\Big\{Bw_{\bar{x}_2x_2\bar{x}_2x_2}+\beta w+\frac{h_1}{2}D(1-\nu^2)w_{\bar{x}_2x_2\bar{x}_2x_2}-\frac{\alpha}{h_1(1+h_1\alpha/(2D))}\Big(w_{x_1}+\frac{h_1\nu}{2}w_{\bar{x}_2x_2}$$

$$+\frac{h_1 M}{2D}\Big)+\frac{h_1\nu\alpha}{2(1+h_1\alpha/(2D))}$$

$$\times\left(w_{x_1\bar{x}_2x_2}+\frac{h_1\nu}{2}w_{\bar{x}_2x_2\bar{x}_2x_2}+\frac{h_1\nu}{2}M_{\bar{x}_2x_2}\right)$$

$$-Q-\frac{h_1}{2}q+\frac{M}{h_1}-\frac{h_1\nu}{2}M_{\bar{x}_2x_2}\Big\}=0, \qquad (57)$$

$$\frac{\alpha}{1+h_1\alpha/(2D)}\left(w_{x_1}+\frac{h_1\nu}{2}w_{\bar{x}_2x_2}\right)-D(w_{\bar{x}_1x_1}$$

$$+\nu w_{\bar{x}_2x_2})^{(+1_1)}+Dh_1(w_{\bar{x}_1x_1x_1}+\nu w_{\bar{x}_2x_2x_1})^{(+1_1)}$$

$$+h_1^2D[w_{\bar{x}_2x_2\bar{x}_2x_2}+(2-\nu)w_{\bar{x}_1\bar{x}_2x_1x_2}-q]^{(+1_1)}$$

$$-\frac{M}{1+h_1\alpha/(2D)}=0. \qquad (58)$$

容易验证，方程(58)以误差 $O(|h|^2)$ 逼近边界条件(46)的第一式．将(57)和(58)相加，并将结果除以 h_1，得到条件(46)中第二式的逼近：

$$D(w_{\bar{x}_1x_1x_1}+(2-\nu)w_{\bar{x}_2x_2x_1})^{(+1_1)}+Bw_{\bar{x}_2x_2\bar{x}_2x_2}+\beta w$$

$$+Q+\frac{h_1\nu}{2}\frac{\alpha}{1+h_1\alpha/(2D)}\left(w_{x_1\bar{x}_2x_2}+\frac{h_1\nu}{2}\right.$$

$$\left.\times w_{\bar{x}_2x_2\bar{x}_2x_1}\right)+\frac{h_1}{2}D(1-\nu^2)w_{\bar{x}_2x_2\bar{x}_2x_2}$$

$$+h_1D(w_{\bar{x}_2x_2\bar{x}_2x_2}+\nu w_{\bar{x}_1\bar{x}_2x_1x_2})^{(+1_1)}-\frac{h_1}{2}q$$

$$-h_1q^{(+1_1)}-\frac{h_1\nu}{2}M_{\bar{x}_2x_2}+\frac{\alpha h_1\nu}{2(1+h_1\alpha/(2D))}$$

$$\times\frac{h_1}{2D}M_{\bar{x}_2x_2}=0. \qquad (59)$$

方程(59)以误差 $O(|h|^2)$ 逼近边界条件(46)中的第二式．

第五章　差分格式理论的数学工具

本章是辅助性的，这里引入一些以后最常用到的记号并导出一些基本公式，借助这些公式以变换含有网格函数的表达式．然后叙述得到先验估计及研究差分格式收敛性的基本方法．我们以一维问题为例来说明这些方法．其次我们研究嵌入定理的网格模拟并导出某些网格算子的下界估计．在第六章当我们进行先验估计及研究差分格式的收敛速度时都要利用这些结果．

§ 1. 记号,差分公式和若干不等式

1. 记号． 设 $\bar{\omega}=\{x=x_i|i=0,1,\cdots,N;\ x_0=0,\ x_N=l\}$ 是 $[0,l]$ 上的网格．点 x_i 处的网格步长由 $h_i=x_i-x_{i-1}$, $i=1,2,\cdots$ 给出，而平均步长是 $\hbar_i=(h_i+h_{i+1})/2$, $i=1,2,\cdots,N-1$. 令 $\hbar_0=h_1/2$, $\hbar_N=h_N/2$. 如果在全部网格节点上步长不变,即 $h=l/N$, 则网格 $\bar{\omega}$ 称为均匀的．

我们引进下述记号：

$$\omega=\{x_i|i=1,2,\cdots,N-1\},$$
$$\mathring{\omega}=\{x_i|i=2,3,\cdots,N-2\},$$
$$\omega^+=\{x_i|i=1,2,\cdots,N\},$$
$${}^+\omega=\{x_i|i=0,1,\cdots,N-1\}.$$

设 $v(x)$ 与 $w(x)$ 是给定在 $\bar{\omega}$ 上的某些网格函数．用下面的公式定义这些函数的内积：

$$(v, w)_{\bar{\omega}} = \sum_{i=0}^{N} v(x_i)w(x_i)\hbar_i. \tag{1}$$

若 $v(x_i)$ 和 $w(x_i)$ 看作是连续变量 $x \in [0, l]$ 的函数 $v(x)$ 和 $w(x)$ 在网格 $\bar{\omega}$ 上的值,则内积(1)就是积分

$$\int_0^l v(x)w(x)dx \tag{2}$$

的梯形求积公式. 除了对给定在 $\bar{\omega}$ 上的网格函数所定义的内积(1)以外,以后还要用到给定在 ω^+, $^+\omega$, ω 和 $\mathring{\omega}$ 上的网格函数的内积. 设

$$(v, w)_{\omega^+} = \sum_{i=1}^{N} v(x_i)w(x_i)h_i, \tag{3}$$

$$(v, w)_{^+\omega} = \sum_{i=0}^{N-1} v(x_i)w(x_i)h_{i+1}, \tag{4}$$

$$(v, w)_{\omega} = \sum_{i=1}^{N-1} v(x_i)w(x_i)\hbar_i, \tag{5}$$

$$(v, w)_{\mathring{\omega}} = \sum_{i=2}^{N-2} v(x_i)w(x_i)\hbar_i.$$

内积(3)可解释为积分(2)的右矩形求积公式,而(4)可作为同一积分的左矩形求积公式. 容易验证

$$(v, w)_{\bar{\omega}} = \frac{1}{2}[(v, w)_{\omega^+} + (v, w)_{^+\omega}].$$

若不引起误会，我们有时略去指明对那个网格求和的足标而简写为 (v, w).

2. 差分公式. 为了变换含有网格函数的差商的表达式，取乘积的差商公式是有用的. 利用差商的定义不难验证下述公式成立:

$$(vw)_{\bar{x},i} = v_{\bar{x},i}w_{i-1} + v_i w_{\bar{x},i} = v_{\bar{x},i}w_i + v_{i-1}w_{\bar{x},i}$$
$$= v_{\bar{x},i}w_i + v_i w_{\bar{x},i} - h_i v_{\bar{x},i}w_{\bar{x},i}, \tag{6}$$

$$(vw)_{x,i}=v_{x,i}w_{i+1}+v_iw_{x,i}=v_{x,i}w_i+v_{i+1}w_{x,i}$$
$$=v_{x,i}w_i+v_iw_{x,i}+h_{i+1}v_{x,i}w_{x,i}. \qquad (7)$$

从这些公式容易导出分部求和公式. 例如将(6)乘上 h_i 然后将所得关系式按 i 从 $m+1$ 到 $n(0\leqslant m<n\leqslant N)$ 求和得到

$$\sum_{i=m+1}^{n}(vw)_{\bar{x},i}h_i$$
$$=\sum_{i=m+1}^{n}v_{\bar{x},i}w_{i-1}h_i+\sum_{i=m+1}^{n}v_iw_{\bar{x},i}h_i.$$

在左端进行求和, 并将右端第一个和式中求和的足标进行替换 $i-1=i'$, 在进行一些合并之后得到下面的公式:

$$\sum_{i=m+1}^{n}v_iw_{\bar{x},i}h_i=-\sum_{i=m}^{n-1}v_{x,i}w_ih_{i+1}+v_nw_n-v_mw_m \qquad (8)$$

(分部求和公式). (8)式右端和号中的第一项等于

$$v_{x,m}w_mh_{m+1}=v_{m+1}w_m-v_mw_m.$$

所以公式(8)可以变换为形式:

$$\sum_{i=m+1}^{n-1}v_{x,i}w_ih_{i+1}$$
$$=-\sum_{i=m+1}^{n}v_iw_{\bar{x},i}h_i+v_nw_n-v_{m+1}w_m. \qquad (9)$$

由公式(9), 并注意到, $v_{x,i}h_{i+1}=v_{\hat{x},i}\hbar_i$, 我们得到如下公式:

$$\sum_{i=m+1}^{n-1}v_{\hat{x},i}w_i\hbar_i$$
$$=-\sum_{i=m+1}^{n}v_iw_{\bar{x},i}h_i+v_nw_n-v_{m+1}w_m. \qquad (10)$$

在关系式(10)中若令 $v_i=a_iu_{x,i}$, $w_i=v_i$, 则有公式

$$\sum_{i=m+1}^{n-1}(au_{\bar{x}})_{\hat{x},i}v_i\hbar_i$$

$$= -\sum_{i=m+1}^{n} a_i u_{\bar{x},i} v_{\bar{x},i} h_i + a_n u_{\bar{x},n} v_n - a_{m+1} u_{x,m} v_m. \tag{11}$$

公式(11)在 $m=0$，$n=N$ 时称为第一差分格林公式且可写成:

$$((au_{\bar{x}})_{\hat{x}}, v)_{\omega} = -(au_{\bar{x}}, v_{\bar{x}})_{\omega^+} + a_N u_{\bar{x},N} v_N - a_1 u_{x,0} v_0. \tag{12}$$

从(12)减去关系式

$$((av_{\bar{x}})_{\hat{x}}, u)_{\omega} = -(av_{\bar{x}}, u_{\bar{x}})_{\omega^+} + a_N v_{\bar{x},N} u_N - a_1 v_{x,0} u_0,$$

得到

$$((au_{\bar{x}})_{\hat{x}}, v)_{\omega} - ((av_{\bar{x}})_{\hat{x}}, u)_{\omega}$$
$$= a_N(u_{\bar{x}}v - uv_{\bar{x}})_N - a_1(u_x v - uv_x) \tag{13}$$

(第二差分格林公式).

对于四阶差分算子 $(bu_{\bar{x}x})_{\bar{x}x}$ 也有类似第一与第二差分格林公式(12)与(13)的关系式. 例如，在网格 $\bar{\omega}$ 是均匀的假定下我们来建立与第一格林公式 (12) 类似的公式. 从 (11) 当 $m=1, n=N-1, a\equiv 1, u\equiv w$ 时，利用证明(13)式的论证方法，我们推出恒等式

$$(w_{\bar{x}x}, v)_{\mathring{\omega}} - (w, v_{\bar{x}x})_{\mathring{\omega}}$$
$$= (w_{\bar{x}}v - wv_{\bar{x}})_{N-1} - (w_x v - wv_x)_1.$$

从这个恒等式的两端减去 $h(w_1 v_{\bar{x}x,1} + w_{N-1} v_{\bar{x}x,N-1})$ 并注意到

$$(v_x - hv_{\bar{x}x})_1 = v_{\bar{x},1} = v_{x,0},$$
$$(-v_{\bar{x}} - hv_{\bar{x}x})_{N-1} = -v_{x,N-1} = -v_{\bar{x},N}.$$

就得到

$$(w_{\bar{x}x}, v)_{\mathring{\omega}} - (w, v_{\bar{x}x})_{\omega}$$
$$= (w_{\bar{x},N-1}v_{N-1} - w_{N-1}v_{\bar{x},N}) - (w_{x,1}v_1 - w_1 v_{x,0}).$$

令 $w = bu_{\bar{x}x}$，我们得到四阶算子的第一差分格林公式

$$((bu_{\bar{x}x})_{\bar{x}x}, v)_{\mathring{\omega}} = (bu_{\bar{x}x}, v_{\bar{x}x})_{\omega} + [(bu_{\bar{x}x})_{\bar{x}} v - bu_{\bar{x}x} v_x]_{N-1} - [(bu_{\bar{x}x})_x v - bu_{\bar{x}x} v_{\bar{x}}]_1. \quad (14)$$

3. 若干不等式. 下面我们将经常用到若干熟知的代数不等式.

1）哥西不等式：

$$\left|\sum_{i,j=0}^{n} \alpha_{ij} a_i b_j\right| \leqslant \left(\sum_{i,j=0}^{n} \alpha_{ij} a_i a_j\right)^{1/2} \left(\sum_{i,j=0}^{n} \alpha_{ij} b_i b_j\right)^{1/2}, \quad (15)$$

其中 $\alpha_{ij} \geqslant 0$ 当 $i, j = 0, 1, \cdots, n$ 时.

2）ε-不等式

$$|ab| \leqslant \varepsilon a^2 + \frac{1}{4\varepsilon} b^2, \quad (16)$$

其中 ε 是任意正数.

在具体情况下，一般哥西不等式具有特殊的形式. 例如，若 $n = N$, $\alpha_{ij} = 0$（当 $i \neq j$），$\alpha_{ii} = \hbar_i$（当 $i = 1, 2, \cdots, N-1$），$\alpha_{00} = h_1/2$, $\alpha_{NN} = h_N/2$, $a_i = u(x_i)$, $b_i = v(x_i)$，则不等式(15)可写成下述形式：

$$|(u, v)_{\bar{\omega}}| \leqslant (u, u)_{\bar{\omega}}^{1/2} (v, v)_{\bar{\omega}}^{1/2},$$

量 $(v, v)_{\bar{\omega}}^{1/2}$ 是 L_2 范数的网格模拟. 注意到这种情况，引入下面的记号：

$$\|v\|_{L_2(\bar{\omega})} = (v, v)_{\bar{\omega}}^{1/2},$$

那么前面的不等式可写成形式：

$$|(u, v)_{\bar{\omega}}| \leqslant \|u\|_0 \|v\|_0,$$

其中 $\|v\|_0 = \|v\|_{L_2(\bar{\omega})}$.

§2. 一 维 模 型

这一节的材料基本上是带有方法性的. 这里研究二阶与

四阶常差分方程的边值问题，并用这些最简单的例子来说明网格问题的研究方法.

网格问题的研究是由三个阶段组成的：(1) 阐明问题的可解性，(2) 研究按右端与边界条件的稳定性问题，(3) 研究网格问题的解对被逼近的问题的解的收敛速度. 第二阶段的基本目的在于得到解的先验估计. 借助于先验估计，一方面可以阐明问题的可解性，另一方面可得到网格问题的收敛速度的估计.

1. 二阶一维方程的第一边值问题. 在网格

$$\bar{\omega} = \{x = x_i \mid i = 0, 1, \cdots, N; x_0 = 0, x_N = l\}$$

上考虑下面的问题：

$$\begin{cases} \Lambda y \equiv -(a y_{\bar{x}})_{\hat{x}} = \varphi, & x \in \omega, \\ y(0) = u_0, \ y(l) = u_1. \end{cases} \tag{1}$$

假定问题(1)的系数 $a(x)$ 满足条件

$$a(x) \geqslant c_0 > 0, \ x \in \omega^+. \tag{2}$$

我们来研究所提问题的可解性问题. 考虑齐次问题 ($\varphi \equiv 0$, $u_0 = u_1 = 0$)，这个问题的解显然存在. 设 $y(x)$ 是齐次问题的一个解. 将方程(1)乘以 $y\hbar$ 且按网格 ω 求和. 用 § 1 中的第一差分格林公式(12)变换所得表达式，将有

$$(\Lambda y, y)_\omega = [y, y] = 0, \tag{3}$$

其中

$$[v, v] \equiv (a v_{\bar{x}}, v_{\bar{x}})_{\omega^+}. \tag{4}$$

注意到不等式(2)，从关系式(4)求得 $[v, v] \geqslant c_0 (v_{\bar{x}}, v_{\bar{x}})_{\omega^+} \geqslant 0$. 但 $(v_{\bar{x}}, v_{\bar{x}})_{\omega^+} = 0$ 只有当 $v(x) = \text{const}$, $x \in \bar{\omega}$ 才成立，所以从公式(3)推出齐次问题的唯一解是常数，根据边界条件，这个常数为零. 这就意味着对任意的 $\varphi(x)$，u_0 及 u_1 问题(1),(2)的解存在且唯一.

我们来得出问题(1)的解的先验估计． 首先考虑带有齐次边界条件

$$y(0)=y(l)=0 \tag{5}$$

的问题．设 $\overset{\circ}{V}$ 是网格函数的集合，它们给定在 $\bar{\omega}$ 上而当 $x=0$ 与 $x=l$ 时等于零．对这个集合中的函数引进两种范数

$$\|v\|_{\overset{\circ}{1}}^2=(v_{\bar{x}},v_{\bar{x}})_{\omega^+}, \tag{6}$$

它使集合 $\overset{\circ}{V}$ 成为赋范空间，以 $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\bar{\omega})$ 记之，以及

$$\|\varphi\|_{-1}=\sup_{0\neq v\in V}\frac{|(\varphi,v)_\omega|}{\|v\|_{\overset{\circ}{1}}}, \tag{7}$$

它使 $\overset{\circ}{V}$ 成为赋范空间 $W_2^{-1}(\omega)$．将方程(1)乘以 yh，再按网格 ω 求和，并注意边界条件(5)，利用§1中的第一差分格林公式(12)变换所得的表达式．结果得到

$$(ay_{\bar{x}},\ y_{\bar{x}})_{\omega^+}=(\varphi,\ y)_\omega.$$

考虑到不等式(2)并注意到关系式(6)，(7)，我们由此求得

$$c_0\|y\|_{\overset{\circ}{1}}^2\leqslant|(\varphi,y)_\omega|\leqslant\|y\|_{\overset{\circ}{1}}\|\varphi\|_{-1}, \tag{8}$$

或

$$\|y\|_{\overset{\circ}{1}}\leqslant\frac{1}{c_0}\|\varphi\|_{-1}. \tag{9}$$

这样就得到了问题(1)，(5)的解的先验估计．

转到带有非齐次边界条件的问题(1)．我们把这个问题的解表为形式

$$y(x)=\bar{y}(x)+\overset{\circ}{y}(x),\ x\in\bar{\omega}, \tag{10}$$

其中

$$\bar{y}_{\bar{x}x}=0,\ x\in\omega,\ \bar{y}(0)=u_0,\ \bar{y}(l)=u_1, \tag{11}$$

而

$$\Lambda\overset{\circ}{y}=\varphi-\Lambda\bar{y},\ x\in\omega,\ \overset{\circ}{y}(0)=\overset{\circ}{y}(l)=0. \tag{12}$$

我们来估计问题(11)与(12)的解．对(2)再补充假设

$$a(x)\leqslant c_1,\ x\in\omega^+. \tag{13}$$

为了估计问题(12)的解我们利用关系式(8)，根据这个关系式得

$$c_0\|\mathring{y}\|_{\overset{\circ}{1}}^2 \leqslant \|\varphi\|_{-1}\|\mathring{y}\|_{\overset{\circ}{1}} + |(\Lambda\bar{y},\ \mathring{y})_\omega|. \tag{14}$$

注意§1中的第一差分格林公式(12)，我们求得

$$|(\Lambda\bar{y},\ \mathring{y})_\omega| = |(a\bar{y}_{\bar{x}},\ \mathring{y}_{\bar{x}})_{\omega^+}| = |[\bar{y},\ \mathring{y}]|,$$

而利用条件(13)及§1中的哥西不等式(15)得到估计式

$$|(\Lambda\bar{y},\ \mathring{y})_\omega| \leqslant c_1\|\bar{y}\|_{\overset{\circ}{1}}\|\mathring{y}\|_{\overset{\circ}{1}}.$$

把这个估计式代入(14)，得到

$$c_0\|\mathring{y}\|_{\overset{\circ}{1}}^2 \leqslant \|\varphi\|_{-1}\|\mathring{y}\|_{\overset{\circ}{1}} + c_1\|\bar{y}\|_{\overset{\circ}{1}}\|\mathring{y}\|_{\overset{\circ}{1}},$$

由此推出

$$\|\mathring{y}\|_{\overset{\circ}{1}} \leqslant \frac{1}{c_0}\|\varphi\|_{-1} + \frac{c_1}{c_0}\|\bar{y}\|_{\overset{\circ}{1}}. \tag{15}$$

现在来求 $\bar{y}(x)$. 从(11)推出

$$\bar{y}(x) = \frac{u_1 - u_0}{l}x + u_0, \tag{16}$$

因而

$$\|\bar{y}\|_{\overset{\circ}{1}} = \frac{1}{\sqrt{l}}|u_1 - u_0|.$$

将它代入(15)，得到函数 $\mathring{y}(x)$的估计

$$\|\mathring{y}\|_{\overset{\circ}{1}} \leqslant \frac{1}{c_0}\|\varphi\|_{-1} + \frac{c_1}{c_0\sqrt{l}}|u_1 - u_0|. \tag{17}$$

我们来估计 $\bar{y}$. 函数 $\bar{y}(x)$ 不属于集合 $\overset{\circ}{V}$，也就是说它在 $x=0$ 与 $x=l$ 不为零. 因此量 $(y_{\bar{x}},\ y_{\bar{x}})_{\omega^+}$ 不可能作为这个函数的范数. 因为当 $v(x)=\text{const} \neq 0,\ x\in\bar{\omega}$ 时 $(v_{\bar{x}},\ v_{\bar{x}})_{\omega^+}=0$. 由于这个缘故我们引进新的范数

$$\|v\|_1^2 = (v_{\bar{x}},\ v_{\bar{x}})_{\omega^+} + (v,\ v)_{\bar{\omega}}, \tag{18}$$

并用这种范数来估计 $\bar{y}$. 从关系式(16)推出

$$(\bar{y}_{\bar{x}},\ \bar{y}_{\bar{x}})_{\omega^+} = \frac{|u_1 - u_0|^2}{l},$$

$$(\bar{y},\bar{y})_{\bar{\omega}} \leqslant l \max_{x\in\bar{\omega}} |\bar{y}|^2 \leqslant l(|u_0| + |u_1|)^2,$$

因此

$$\|\bar{y}\|_1 \leqslant \sqrt{l + 1/l}\,(|u_0| + |u_1|). \tag{19}$$

回到问题(1)的解的估计．从关系式(10)推出不等式:

$$\|y\|_1 \leqslant \|\bar{y}\|_1 + \|\mathring{y}\|_1. \tag{20}$$

右端第一项 $\|\bar{y}\|_1$ 可用不等式(19)来估计，而对函数 $\mathring{y}$ 我们只有 $\mathring{W}_2^1$ 范数的估计．但从(6)与(18)我们推出

$$\|v\|_1^2 = \|v\|_{\overset{\circ}{1}}^2 + (v,v)_{\bar{\omega}},$$

因此，只要估计 $(\mathring{y},\mathring{y})_{\bar{\omega}} = \|\mathring{y}\|_0^2$．在本章§5(引理2)将证明,对 $\mathring{V}$ 中的函数成立不等式[1]

$$\|v\|_{\overset{\circ}{1}}^2 \geqslant \frac{8}{l^2}\|v\|_0^2.$$

因此

$$\|v\|_{\overset{\circ}{1}}^2 \geqslant \frac{1}{(1 + l^2/8)}\|v\|_1^2. \tag{21}$$

注意到这个估计式,从不等式(17)求出

$$\|\mathring{y}\|_1 \leqslant \frac{\sqrt{1 + l^2/8}}{c_0}\|\varphi\|_{-1}$$
$$+ \frac{c_1}{c_0}\frac{\sqrt{1 + l^2/8}}{l^{1/2}}(|u_0| + |u_1|).$$

利用这个不等式和不等式(19)来估计关系式(20)的右端,我们最后得到

$$\|y\|_1 \leqslant M_1\|\varphi\|_{-1} + M_2(|u_0| + |u_1|), \tag{22}$$

其中

---

1) 前面已经指出，这里讲的材料是带有方法性的．我们追求的目标之一在于说明为了研究差分格式需要什么类型的专门的不等式．此处和今后引用的正是这样的不等式,它们的证明我们将在§§4,5中给出．

$$M_1 = \frac{\sqrt{1 + l^2/8}}{c_0},$$

$$M_2 = \frac{c_1}{c_0}\frac{\sqrt{1 + l^2/8}}{l^{1/2}} + \sqrt{l + 1/l}.$$

这就得到了问题(1)的解的先验估计. 注意,出现在这个估计式中的常数 M_1 与 M_2 不依赖于网格 $\bar{\omega}$, 所以从 (22) 可推出问题(1)的解按右端和按边界条件的稳定性.

我们利用所得的先验估计来研究差分格式的收敛速度. 我们考虑区间 $[0, l]$ 上的问题:

$$(ku')' = -f,\ 0 < x < l,\ u(0) = u_0,\ u(l) = u_1. \quad (23)$$

根据第二章 § 2, 在任何非均匀网格 $\hat{\omega}$ 上,例如假定

$$a(x_i) = k(x_i - h_i/2),\ \varphi(x_i) = f(x_i), \quad (24)$$

则问题 (1) 逼近问题 (23). 对函数 $z(x) = y(x) - u(x)$, $x \in \hat{\omega}$ 我们得到问题

$$\begin{cases} \Lambda z = \psi,\ x \in \omega, \\ z(0) = z(l) = 0, \end{cases} \quad (25)$$

其中 $\psi(x) = \Lambda u + f$ 是逼近误差. 我们来估计问题(25)的解. 注意到不等式(9),求得

$$\|z\|_{\overset{\circ}{1}} \leqslant \frac{1}{c_0}\|\psi\|_{-1}. \quad (26)$$

容易验证(例如参看第四章 § 2 中的公式(6)—(8)),对于逼近误差 $\psi(x)$ 有下述表达式:

$$\psi(x) = \eta_{\hat{x}} + \mathring{\psi},\ \eta(x) = O(h^2),\ \mathring{\psi}(x) = O(\hbar^2). \quad (27)$$

注意到 $\|\psi\|_{-1}$ 是由关系式(7)定义的,我们来估计 $(\psi, v)_\omega$, $v \in \mathring{V}$. 考虑到表达式(27)并忆及 $\eta_{\hat{x},i} = \frac{h_{i+1}}{\hbar_i}\eta_{x,i}$ 将有

$$(\psi, v)_\omega = (\eta_{\hat{x}}, v)_\omega + (\mathring{\psi}, v)_\omega$$

$$= \sum_{i=1}^{N-1} \eta_{x,i} v_i h_{i+1} + (\overset{*}{\psi}, v)_\omega.$$

利用§1中的分部求和公式(9)变换右端第一项,求得

$$(\psi, v)_\omega = -(\eta, v_{\bar{x}})_{\omega^+} + (\overset{*}{\psi}, v)_\omega.$$

为了估计右端,我们应用§1的哥西不等式(15),得到

$$|(\psi, v)_\omega| \leqslant (\eta^2, 1)^{1/2}_{\omega^+} \|v\|_{\overset{\circ}{1}} + \|\overset{*}{\psi}\|_0 \|v\|_0$$

$$\leqslant \{(\eta^2, 1)_{\omega^+} + \|\overset{*}{\psi}\|_0^2\}^{1/2} \|v\|_1.$$

将此估计式代入定义(7)并考虑到不等式(21).因此有不等式

$$\|\psi\|_{-1} \leqslant \{(\eta^2, 1)_{\omega^+} + \|\overset{*}{\psi}\|_0^2\}^{1/2} \sup \frac{\|v\|_1}{\|v\|_{\overset{\circ}{1}}}$$

$$\leqslant \sqrt{1 + l^2/8}\ \{(\eta^2, 1)_{\omega^+} + \|\overset{*}{\psi}\|_0^2\}^{1/2}.$$

注意到(27),由此及从(26)求得

$$\|z\|_{\overset{\circ}{1}} = O(|h|^2), \ |h| = \max h(x).$$

于是,当条件(2)满足时,差分问题(1),(24)的解以 $O(|h|^2)$ 的速度收敛于问题(23)的充分光滑的解.

2. 一维二阶方程的第三边值问题. 在位于区间$[0, l]$上的均匀网格 $\bar{\omega}$ 上,我们考虑下述问题:

$$\begin{cases} \Lambda y \equiv -(a y_{\bar{x}})_x + dy = \varphi(x), \ x \in \omega, \\ -a_1 y_{x,0} + \left(\kappa_0 + \dfrac{h}{2} d_0\right) y_0 = g_0 + \dfrac{h}{2} \varphi_0, \\ a_N y_{\bar{x},N} + \left(\kappa_1 + \dfrac{h}{2} d_N\right) y_N = g_1 + \dfrac{h}{2} \varphi_N. \end{cases} \tag{28}$$

假定系数 $a(x)$满足条件(2),而系数 $d(x)$, κ_0 与 κ_1 满足条件

$$d(x) \geqslant 0, \ x \in \omega, \ \kappa_0 \geqslant 0, \ \kappa_1 \geqslant 0, \tag{29}$$

$$\kappa_0 + \kappa_1 + (d, 1)_{\bar{\omega}} > 0. \tag{30}$$

引进算子 Λ,它由下式定义:

$$
\bar{\Lambda} v(x)=\begin{cases}-\dfrac{2}{h} a_1 v_x+\left(\dfrac{2}{h} \kappa_0+d_0\right) v, & x=0, \\ -(a v_{\bar{x}})_x+d v, & x \in \omega, \\ \dfrac{2}{h} a_N v_{\bar{x}}+\left(\dfrac{2}{h} \kappa_1+d_N\right), & x=l,\end{cases} \quad (31)
$$

将问题(28)改写成下述形式:

$$
\bar{\Lambda} v=\Phi, \quad x \in \bar{\omega}, \quad (32)
$$

其中

$$
\Phi=\begin{cases}\varphi_0+\dfrac{2}{h} g_0, & x=0, \\ \varphi(x), & x \in \omega, \\ \varphi_N+\dfrac{2}{h} g_1, & x=l .\end{cases} \quad (33)
$$

我们研究问题(32)的可解性,考察内积 $(\bar{\Lambda} v, v)_{\bar{\omega}}$. 利用§1的格林公式(12)求得

$$
\begin{aligned}
(\bar{\Lambda} v, v)_{\bar{\omega}} &= (a v_{\bar{x}}, v_{\bar{x}})_{\omega^+}+(d v, v)_{\bar{\omega}}+\kappa_0 v_0^2+\kappa_1 v_N^2 \\
&= [v, v].
\end{aligned} \quad (34)
$$

由此考虑到条件(2)与(29),推出

$$
[v, v] \geqslant 0,
$$

并且,若 $[v, v]=0$, 则 $v \equiv \text{const}, x \in \bar{\omega}$. 因为只要 $\kappa_0, \kappa_1, d(\mathring{x})$ ($\mathring{x}$ 是网格 $\bar{\omega}$ 的某节点) 之中有一个大于零, 从等式 $[v, v]=0$ 就将导出 $v(0)$ 或 $v(l)$ 或 $v(\mathring{x})$ 等于零, 亦即 $v \equiv 0$.

现在我们假定方程(32)中的 $\Phi \equiv 0$, $x \in \bar{\omega}$, 考虑所得到的齐次问题,根据恒等式(34),这个问题的解 $y(x)$ 满足条件 $[y, y]=0$, 根据刚才的证明便知 $y(x) \equiv 0$, $x \in \bar{\omega}$. 故当满足条件(2),(29),(30)时齐次问题(32)只有平凡解,因而在同样条件下对任意函数 $\Phi(x)$ 问题(32)是唯一可解的. 我们来

求问题(32)的解的先验估计. 为此令(34)中的 $v=y$ 并考虑到方程(32)及公式(33). 结果得到

$$[y, y]=(\varphi, y)_{\bar{\omega}}+g_0 y(0)+g_1 y(l). \tag{35}$$

我们用空间 $W_2^1(\bar{\omega})$ 中的范数(参看(18))来估计解 $y(x)$. 假设问题(32)的系数 $d(x)$, κ_0 与 κ_1 能使以下不等式成立:

$$[v, v] \geqslant m\|v\|_1^2, \tag{36}$$

其中 m 是正常数,它既与网格 $\bar{\omega}$ 无关,也与函数 $v(x)$ 无关. 考虑到(34), 容易验证,如果除条件(2)与(29)外还满足补充条件

$$d(x) \geqslant c_3>0, \quad x \in \bar{\omega},$$

则不等式(36)将成立.

保证不等式(36)成立的其他充分条件将在本章 §5 建立.

于是,从恒等式(35)及不等式(36)推出

$$\|y\|_1^2 \leqslant \frac{1}{m}\{|(\varphi, y)_{\bar{\omega}}|+|g_0 y(0)|+|g_1 y(l)|\}.$$

设

$$\|\varphi\|_{\overset{\circ}{-1}}=\sup_{v \neq 0} \frac{|(\varphi, v)_{\bar{\omega}}|}{\|v\|_1}. \tag{37}$$

那么

$$\|y\|_1^2 \leqslant \frac{1}{m}\{\|\varphi\|_{\overset{\circ}{-1}}\|y\|_1+|g_0||y(0)|+|g_1||y(l)|\}.$$

为了由此得到先验估计, 需要会用 $\|y\|_1$ 来估计 $|y(0)|$ 与 $|y(l)|$. 在 §4 (定理 2) 将要证明

$$\|v\|_c=\max_{x \in \bar{\omega}}|v(x)| \leqslant M\|v\|_1, \tag{38}$$

其中 $M=\text{const}>0$ 既与网格 $\bar{\omega}$ 无关,也与 $v(x)$ 无关. 把这个不等式代入前一个不等式, 我们得到先验估计

$$\|y\|_1 \leqslant \frac{1}{m}\{\|\varphi\|_{\overset{\circ}{-1}}+M(|g_0|+|g_1|)\}. \tag{39}$$

从这个估计式推出问题(30)的解按右端和按边界条件的稳定性.

利用先验估计(39)来研究差分格式的收敛性. 我们在区间 $[0, l]$ 上考虑问题

$$(ku')' - qu = -f(x),\ 0 < x < l, \tag{40}$$

$$k(0)u'(0) = \kappa_0 u(0) - g_0,\ -k(l)u'(l) = \kappa_1 u(l) - g_1$$

如果在均匀网格 $\bar{\omega}$ 上令

$$a(x_i) = k(x_i - h/2),\ d(x_i) = q(x_i),\ \varphi(x_i) = f(x_i), \tag{41}$$

则根据第二章 § 2, 可用问题(28)逼近问题(40).

函数 $z(x) = y(x) - u(x)$, $x \in \bar{\omega}$ (其中 $y(x)$ 是问题(28),(41)的解,而 $u(x)$ 是问题(40)的解)是下述问题的解:

$$\begin{cases} \Lambda z = \psi(x),\ x \in \omega, \\ -a_1 z_{x,0} + \left(\kappa_0 + \dfrac{h}{2} d_0\right) z_0 = \psi_0, \\ a_N z_{\bar{x},N} + \left(\kappa_1 + \dfrac{h}{2} d_N\right) z_N = \psi_N. \end{cases} \tag{42}$$

在第二章 § 3 中已证明,当问题(40)的解充分光滑时,方程与边界条件的逼近误差为 $O(h^2)$, 亦即

$$\psi(x) = O(h^2),\ x \in \omega,\ \psi_0 = O(h^2),\ \psi_N = O(h^2), \tag{43}$$

由于不等式(39),对问题(42)的解有估计式

$$\|z\|_1 \leqslant \frac{1}{m}\{\|\psi\|_{\overset{\circ}{-1}} + M(|\psi_0| + |\psi_N|)\}.$$

因为(参看公式 (37)) $\|\psi\|_{\overset{\circ}{-1}} \leqslant \|\psi\|_0 \leqslant \sqrt{l}\ \|\psi\|_c$, 于是从上面的估计式并注意到关系式(43)我们得到 $\|z\|_1 = O(h^2)$. 这样,当满足条件(36)时,问题(28)的解以 $O(h^2)$ 的速度收敛于问题(40)的解.

3. 一维二阶方程的第二边值问题. 在 (28) 中假定 $d(x) \equiv 0$, $\kappa_0 = \kappa_1 = 0$. 在这些假定下问题(28)取形式:

$$
\begin{cases}
-(ay_{\bar{x}})_x = \varphi, \ x \in \omega, \\
-a_1 y_{x,0} = g_0 + \dfrac{h}{2}\varphi_0, \quad a_N y_{\bar{x},N} = g_1 + \dfrac{h}{2}\varphi_N.
\end{cases} \tag{44}
$$

注意上述假定是与条件 (30) 相抵触的，而条件 (30) 在研究问题(28)的可解性方面起过决定性作用. 容易验证，(44) 的齐次问题有非平凡解 $y(x) = \text{const}$，因而问题(44)是退化的，所以不可能对任意的右端 $\varphi(x)$ 与 g_0，g_1 都有解. 因为 $[v, v] \equiv (av_{\bar{x}}, v_{\bar{x}})_{\omega^+} = 0$ 只有当 $y(x) = \text{const}$ 时成立，所以根据恒等式(34)，$y(x) \equiv \text{const}$ 是问题(44)的唯一解.

引进算子 $\dot{\Lambda}$，它由下式定义(与(31)比较):

$$
\dot{\Lambda}v(x) \equiv \begin{cases}
-\dfrac{2}{h}a_1 v_x, & x = 0, \\
-(av_{\bar{x}})_x, & x \in \omega, \\
\dfrac{2}{h}a_N v_{\bar{x}}, & x = l.
\end{cases}
$$

从上面所述可知，零是这个算子的一重固有值，因而如果对齐次问题(44)的右端加上一个条件，则它将是可解的. 利用 § 1 的第二差分格林公式 (13) 变换内积 $(\dot{\Lambda}y, 1)_{\bar{\omega}}$，求得 $(\dot{\Lambda}y, 1)_{\bar{\omega}} = 0$. 而另一方面，

$$(\dot{\Lambda}y, 1)_{\bar{\omega}} = (\varphi, 1)_{\bar{\omega}} + g_0 + g_1,$$

因此应该满足条件

$$(\varphi, 1)_{\bar{\omega}} + g_0 + g_1 = 0. \tag{45}$$

于是，当满足条件(45)时问题(44)是可解的. 我们来求这个解的先验估计. 像研究问题(28)时一样，我们求得

$$[y, y] \equiv (ay_{\bar{x}}, y_{\bar{x}})_{\omega^+} = (\varphi, y)_{\bar{\omega}} + g_0 y(0) + g_1 y(l).$$

注意到条件(12)，定义(37)及不等式(38)，我们得到

$$c_0(y_{\bar{x}}, y_{\bar{x}})_{\omega^+} \leqslant \|\varphi\|_{\overset{\circ}{-1}} \|y\|_1 + M(|g_0| + |g_1|)\|y\|_1. \tag{46}$$

在本章 § 5 我们将要证明(引理 3):

$$(v_{\bar{x}}, v_{\bar{x}})_{\omega^+} \geqslant M_1\|v\|_1^2 - M_2(v, 1)_{\bar{\omega}}^2,$$

其中 M_1 与 M_2 是与网格 $\bar{\omega}$ 和 $v(x)$ 无关的正常数．据此，从不等式(46)求得

$$c_0 M_1\|y\|_1^2 \leqslant \|\varphi\|_{\overset{\circ}{-1}}\|y\|_1 + M(|g_0| + |g_1|)\|y\|_1 + c_0 M_2(y, 1)_{\bar{\omega}}^2.$$

现在利用 § 1 中的 ε-不等式 (16) 来估计乘积 $\|\varphi\|_{\overset{\circ}{-1}}\|y\|_1$，$|g_0|\|y\|_1$，$|g_1|\|y\|_1$，我们得估计式

$$(c_0 M_1 - \varepsilon - 2M\varepsilon)\|y\|_1^2 \leqslant \frac{1}{4\varepsilon}\|\varphi\|_{\overset{\circ}{-1}}^2 + \frac{M}{4\varepsilon}(|g_0|^2 + |g_1|^2) + c_0 M_2(y, 1)_{\bar{\omega}}^2.$$

选择 $\varepsilon > 0$ 使之满足条件 $(c_0 M_1 - \varepsilon - 2M\varepsilon) = c_0 M_1/2$，我们得到下面的先验估计：

$$\|y\|_1^2 \leqslant M_3\{\|\varphi\|_{\overset{\circ}{-1}}^2 + |g_0|^2 + |g_1|^2 + (y, 1)_{\bar{\omega}}^2\}. \tag{47}$$

除了已知量之外，(47)的右端还包括未知解与 1 的内积的平方．这一项的存在与下述情况有关：正如问题(1)与 (28) 中所见，未知解不唯一，可以相差一个任意常数项．

我们利用先验估计式 (47) 来研究差分格式的收敛速度．在区间 $[0, l]$ 上考虑问题：

$$(ku')' = -f(x), \quad k(0)u'(0) = -g_0, \quad -k(l)u'(l) = -g_1. \tag{48}$$

假定满足可解性条件

$$\int_0^l f(x)dx + g_0 + g_1 = 0. \tag{49}$$

给定未知解对单位元的投影

$$\int_0^l u(x)dx = Q \tag{50}$$

可以保证解的唯一性．在均匀网格 $\bar{\omega}$ 上我们用问题(44)来逼

近问题(48),(49),在(44)中

$$a(x_i) = k\left(x_i - \frac{h}{2}\right),\ \varphi(x_i) = f(x_i) - R/l,$$

$$R = (f, 1)_{\bar\omega} + g_0 + g_1, \tag{51}$$

而条件(50)用条件

$$(y, 1)_{\bar\omega} = Q \tag{52}$$

来逼近. 根据公式(51),逼近问题满足条件(45),因而它是可解的.

我们来考虑函数 $z(x) = y(x) - u(x)$, 其中 $y(x)$ 是问题(44),(51),(52)的解,而 $u(x)$ 是问题(48)—(50)的解. 对函数 $z(x)$ 得到问题

$$-(az_{\bar x})_x = \psi(x),\ x \in \omega,\ -a_1 z_{\bar x,0} = \psi(0),$$
$$a_N z_{\bar x,N} = \psi(l),\ (z, 1)_{\bar\omega} = Q - (u, 1)_{\bar\omega}. \tag{53}$$

因为问题(44),(51),(52)与(48)—(50)是可解的,所以问题(53)也可解. 注意到先验估计式(47),对 $z(x)$ 我们有

$$\|z\|_1^2 \leqslant M_3\{\|\psi\|_{-1}^2 + |\psi(0)|^2 + |\psi(l)|^2 + (z, 1)_{\bar\omega}^2\}. \tag{54}$$

根据原先证明的 $\psi(x) = O(h^2)$, 由(53)得

$$(z, 1)_{\bar\omega} = Q - (u, 1)_{\bar\omega} = \int_0^l u(x)dx - (u, 1)_{\bar\omega} = O(h^2).$$

这样就从(54)求得 $\|z\|_1 = O(h^2)$. 差分格式(44),(51),(52)的收敛性得证.

4. 一维四阶方程的第一边值问题. 现在转到逼近四阶常微分方程边值问题的差分格式. 设在区间 $[0, l]$ 上引进步长为 h 的均匀网格 $\bar\omega$. 在 $\bar\omega$ 上考虑下述问题:

$$y_{\bar x x \bar x x} = \varphi(x),\ x \in \mathring\omega, \tag{55}$$

$$
\begin{cases}
y(0) = \omega_0, \quad y_x - \dfrac{h}{2} y_{xx} + \dfrac{h^2}{2} y_{xxx}|_{x=0} \\
\qquad = \dfrac{h^3}{2} \varphi(h) + w_0', \\
y_{\bar{x}} + \dfrac{h}{2} y_{\bar{x}\bar{x}} + \dfrac{h^2}{2} y_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}}|_{x=l} \\
\qquad = -\dfrac{h^3}{3} \varphi(l-h) + w_1', \ y(l) = w_1.
\end{cases} \tag{56}
$$

在第四章 §6 第 4 段中已经证明，问题 (55)，(56) 以误差 $O(h^2)$ 逼近问题

$$
\begin{cases}
w^{(4)} = \varphi(x), \ 0 < x < l, \\
w(0) = w_0, \ w'(0) = w_0', \ w(l) = w_1, \ w'(l) = w_1'.
\end{cases} \tag{57}
$$

我们来研究问题(55)，(56)的可解性并得出它的解的先验估计. 将方程(55)乘上 $y(x)h$ 并将所得关系式按网格 $\mathring{\omega}$ 求和:

$$
(y_{\bar{x}x\bar{x}x}, y)_{\mathring{\omega}} = (\varphi, y)_{\mathring{\omega}}.
$$

利用 §1 中的格林公式(14)变换左端得到

$$
(y_{\bar{x}x}^2, 1)_\omega + [y_{\bar{x}x\bar{x}} y - y_{\bar{x}x} y_x]_{N-1} - [y_{\bar{x}xx} y - y_{\bar{x}x} y_{\bar{x}}]_1
$$
$$
= (\varphi, y)_{\mathring{\omega}}. \tag{58}
$$

为了进一步变换所得关系式的左端，我们利用边界条件(56)，因为 $y_1 = y_0 + h y_{x,0}$, $y_{N-1} = y_N - h y_{\bar{x},N}$，所以

$$
[y_{\bar{x}xx} y - y_{\bar{x}x} y_{\bar{x}}]_1 = -y_{xxx} y|_{x=0} + y_x (y_{xx} - h y_{xxx})|_{x=0},
$$
$$
[y_{\bar{x}x\bar{x}} y - y_{\bar{x}x} y_x]_{N-1} = y_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}} y|_{x=l} - y_{\bar{x}} (y_{\bar{x}\bar{x}} + h y_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}})|_{x=l},
$$

再注意到(56)，就得到

$$
-[y_{\bar{x}xx} y - y_{\bar{x}x} y_{\bar{x}}]_1
$$
$$
= -y_{xxx,0} w_0 + \frac{2}{h} y_{x,0}^2 - h\varphi(h) y(h)
$$
$$
+ h\varphi(h) w_0 - \frac{2}{h} w_0' y_{x,0},
$$

$$[y_{\bar{x}x\bar{x}}y - y_{\bar{x}x}y_x]_{N-1}$$

$$= y_{\bar{x}\bar{x}\bar{x},N}w_1 + \frac{2}{h}y_{\bar{x},N}^2 - h\varphi(l-h)y(l-h)$$

$$+ h\varphi(l-h)w_1 - \frac{2}{h}y_{\bar{x},N}w_1'.$$

将这些关系式代入(58)，求得

$$(y_{\bar{x}x}^2, 1)_\omega + \frac{2}{h}(y_{x,0}^2 + y_{\bar{x},N}^2) = (\varphi, y)_\omega$$

$$+ \frac{2}{h}(y_{x,0}w_0' + y_{\bar{x},N}w_1') - h[\varphi(h)w_0$$

$$- \varphi(l-h)w_1]. \tag{59}$$

设 $y(x)$ 是齐次 ($\varphi \equiv 0$, $w_0 = w_1 = w_0' = w_1' = 0$) 问题 (55), (56)的一个解. 于是从(59)推出

$$(y_{\bar{x},x}^2, 1)_\omega = 0, \quad y_{x,0}^2 = 0, \quad y_{\bar{x},N}^2 = 0.$$

但仅当 $y(x) = ax + b$ 时（其中 a 与 b 是某些常数）才有 $(y_{\bar{x},x}^2, 1) = 0$. 从关系式 $y_{x,0}^2 = 0$ 与 $y_{\bar{x},N}^2 = 0$ 推出 $a = 0$，亦即 $y(x) = \text{const}, x \in \bar{\omega}$. 因为根据假设 $y_0 = y_N = 0$，所以 $y(x) \equiv 0, x \in \bar{\omega}$. 于是 $y(x) \equiv 0$ 是齐次问题(55)，(56)的唯一解，从而对任意的 $\varphi(x)$, w_0, w_1, w_0', w_1' 问题(55), (56)的解存在且唯一.

我们来求问题(55), (56)的解的先验估计. 将其解表为 $y(x) \equiv \bar{y}(x) + \mathring{y}(x)$ 的形式，其中 $\bar{y}(x)$ 是具有非齐次边界条件的齐次方程的解:

$$\begin{cases}\bar{y}_{\bar{x}x\bar{x}x} = 0, \ x \in \mathring{\omega}, \ \bar{y}_0 = w_0, \ \bar{y}_{x,0} = w_0', \\ \bar{y}_{\bar{x},N} = w_1', \qquad\qquad \bar{y}_N = w_1,\end{cases} \tag{60}$$

而 $\mathring{y}(x)$ 是下述问题的解:

$$
\begin{cases}
\mathring{y}_{\bar{x}x\bar{x}x} = \varphi, \ x \in \mathring{\omega}, \ \mathring{y}_0 = \mathring{y}_N = 0, \\
\mathring{y}_x - \dfrac{h}{2}\mathring{y}_{xx} + \dfrac{h^2}{2}\mathring{y}_{xxx}\big|_{x=0} = \dfrac{h^3}{2}\varphi(h) \\
\qquad + \dfrac{h}{2}(\bar{y}_{xx} - h\bar{y}_{xxx})\big|_{x=0}, \\
\mathring{y}_{\bar{x}} + \dfrac{h}{2}\mathring{y}_{\bar{x}\bar{x}} + \dfrac{h^2}{2}\mathring{y}_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}}\big|_{x=l} = -\dfrac{h^3}{2}\varphi(l-h) \\
\qquad - \dfrac{h}{2}(\bar{y}_{\bar{x}\bar{x}} + h\bar{y}_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}})\big|_{x=l}.
\end{cases} \tag{61}
$$

对给定在 ϖ 上的网格函数,我们引进范数

$$
\|v\|_2^2 \equiv \|v\|^2_{W_2^2(\varpi)} \equiv \|v_{\bar{x}x}\|_0^2 + \|v\|_0^2,
$$

其中 $\|v_{\bar{x}x}\|_0^2 \equiv \|v\|_{2,0}^2 \equiv (v_{\bar{x}x}, v_{\bar{x}x})_\omega$.

根据恒等式(59),对问题(61)的解我们得到

$$
\begin{aligned}
\|\mathring{y}\|_{2,0}^2 &+ \frac{2}{h}(\mathring{y}_{x,0}^2 + \mathring{y}_{\bar{x},N}^2) \\
&= (\varphi, \mathring{y})_\omega + \mathring{y}_{x,0}(\bar{y}_{xx} - h\bar{y}_{xxx})_0 \\
&\quad - \mathring{y}_{\bar{x},N}(\bar{y}_{\bar{x}\bar{x}} + h\bar{y}_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}})_N.
\end{aligned} \tag{62}
$$

我们来估计这个关系式的右端. 因为

$$
(\bar{y}_{xx} - h\bar{y}_{xxx})_0 = 2\bar{y}_{\bar{x}x}(h) - \bar{y}_{\bar{x}x}(2h),
$$

两次应用 § 1 中的 ε-不等式(16),即得

$$
\begin{aligned}
|\mathring{y}_{x,0}(\bar{y}_{xx} - h\bar{y}_{xxx})_0| &\leqslant 2|\mathring{y}_{x,0}\bar{y}_{\bar{x}x,1}| + |\mathring{y}_{x,0}\bar{y}_{\bar{x}x,2}| \\
&\leqslant (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\mathring{y}_{x,0}^2 + \frac{1}{4\varepsilon_1}4\bar{y}_{\bar{x}x}^2(h) \\
&\quad + \frac{1}{4\varepsilon_2}\bar{y}_{\bar{x}x}^2(2h).
\end{aligned}
$$

令 $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 2/h$ 并使 $\bar{y}_{\bar{x}x}^2(h)$ 与 $\bar{y}_{\bar{x}x}^2(2h)$ 的系数相等,亦即令 $1/\varepsilon_1 = 1/4\varepsilon_2$. 解此方程组得 $\varepsilon_1 = 4\varepsilon_2 = 8/h$. 从而,

$$
|\mathring{y}_{x,0}(\bar{y}_{xx} - h\bar{y}_{xxx})_0| \leqslant \frac{2}{h}\mathring{y}_{x,0}^2
$$

$$+\frac{5}{8}h[\bar{y}_{\bar{x}x}^2(h)+\bar{y}_{\bar{x}x}^2(2h)].$$

类似地可建立估计式

$$|\mathring{y}_{\bar{x},N}(\bar{y}_{\bar{x}\bar{x}}+h\bar{y}_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}})_N|\leqslant\frac{2}{h}\mathring{y}_{\bar{x},N}^2$$

$$+\frac{5}{8}h[\bar{y}_{\bar{x}x}^2(l-h)+\bar{y}_{\bar{x}x}^2(l-2h)].$$

将所得估计式代入(62)，当 $h\leqslant l/5$（即当 $2h\neq l-2h$）我们得到

$$\|\mathring{y}\|_{2,0}^2\leqslant|(\varphi,\mathring{y})_\omega|+\frac{5}{8}h[\bar{y}_{\bar{x}x}^2(h)+\bar{y}_{\bar{x}x}^2(2h)$$

$$+\bar{y}_{\bar{x}x}^2(l-2h)+\bar{y}_{\bar{x}x}^2(l-h)]\leqslant|(\varphi,\mathring{y})_\omega|$$

$$+\frac{5}{8}\|\bar{y}\|_{2,0}^2. \tag{63}$$

利用§1的哥西不等式(15)及 ε-不等式(16)我们来估计右端第一项:

$$|(\varphi,\mathring{y})_\omega|\leqslant\varepsilon\|\mathring{y}\|_0^2+\frac{1}{4\varepsilon}\|\varphi\|_0^2. \tag{64}$$

在本章§5（引理5）将证明，对给定在网格 $\bar{\omega}$ 上并在 $x=0$ 与 $x=l$ 等于零的网格函数,成立不等式

$$\|v_{\bar{x}x}\|_0^2\geqslant M_6\|v\|_0^2,\ M_6=\text{const}>0. \tag{65}$$

把估计式(65)代入不等式(64)，又把不等式(64)代入估计式(63)并令 $\varepsilon=(2M_6)^{-1}$，我们得到

$$\|\mathring{y}\|_{2,0}^2\leqslant M_6\|\varphi\|_0^2+\frac{5}{4}\|\bar{y}\|_{2,0}^2. \tag{66}$$

现在来估计问题(60)的解，经过适当的运算求得问题(60)的解为

$$\bar{y}(x)=w_0+\frac{w_1-w_0}{l}x$$

$$+\frac{w_0-w_1+lw_0'+h(w_1'-w_0')}{l(l-h)(l-2h)}x(l-x)^2$$

$$+\frac{w_1-w_0-lw_1'+h(w_1'-w_0')}{l(l-h)(l-2h)}$$

$$\times x^2(l-x),\ x\in\bar{\omega}. \tag{67}$$

估计 $\bar{y}_{\bar{x}x}(x)$，有

$$\|\bar{y}_{\bar{x}x}\|_{c(\omega)}\leqslant\frac{2}{l(l-h)}\{3(|w_0|+|w_1|)$$

$$+2l(|w_0'|+|w_1'|)\}$$

因而当 $h\leqslant l/5$ 时，

$$\|\bar{y}\|_{2,0}^2\leqslant\frac{5}{l^3}\{3(|w_0|+|w_1|)+2l(|w_0'|$$

$$+|w_1'|)\}^2. \tag{68}$$

把这些估计式代入(66)且考虑到不等式(65)，我们得到函数 $\mathring{y}$ 按 $W_2^2(\bar{\omega})$ 范数的估计

$$\|\mathring{y}\|_2^2\leqslant(1+M_6)\|\varphi\|_0^2+\frac{25}{4}$$

$$\times\frac{1+M_6}{M_6l^3}\{3(|w_0|+|w_1|)+2l(|w_0'|+|w_1'|)\}^2.$$

现在按 $W_2^2(\bar{\omega})$ 范数估计函数 $\bar{y}(x)$. 由(67)求出

$$\|\bar{y}\|_0^2\leqslant l\{2(|w_0|+|w_1|)+l(|w_0'|+|w_1'|)\}^2.$$

考虑到这个不等式和不等式(68)，我们得到

$$\|\bar{y}\|_2^2\leqslant\frac{5}{l^3}\{3(|w_0|+|w_1|)+2l(|w_0'|+|w_1'|)\}^2$$

$$+l\{2(|w_0|+|w_1|)+l(|w_0'|+|w_1'|)\}^2.$$

剩下的是要估计函数 $y(x)$，它等于函数 $\mathring{y}(x)$ 与 $\bar{y}(x)$ 之和．结果得到所求的先验估计

$$\|y\|_2^2 \leqslant 2(\|\mathring{y}\|_2^2 + \|\bar{y}\|_2^2)$$
$$\leqslant 2(1 + M_6)\|\varphi\|_0^2 + l\{2(|w_0| + |w_1|)$$
$$+ l(|w_0'| + |w_1'|)\}^2 + \frac{25 + 45 M_6}{4M_6 l^3}$$
$$\times \{3(|w_0| + |w_1|) + 2l(|w_0'| + |w_1'|)\}^2.$$

这样就得到了问题(55),(56)的解的估计.从所得的先验估计并考虑到问题(55),(56)对问题(57)的逼近误差的估计(参看第四章 § 6 第四段)可知问题(55),(56)的解以速度 $O(h^2)$ 收敛于问题(57)的解.

5. 弹性支承杆的离散模型. 考虑下面的网格问题:

$$y_{\bar{x}x\bar{x}x} = \varphi(x),\quad x \in \mathring{\omega}, \tag{69}$$

$$\begin{cases} y(0) = w_0,\ -y_{xx} + hy_{xxx}|_{x=0} = \mathscr{M}_0 + h^2\varphi(h), \\ y_{\bar{x}\bar{x}} + hy_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}}|_{x=l} = \mathscr{M}_1 - h^2\varphi(l-h),\ y(l) = w_1. \end{cases} \tag{70}$$

我们来求它的先验估计. 这个问题的解可表示为形状 $y(x) = \mathring{y}(x) + \bar{y}(x)$, $x \in \bar{\omega}$, 其中 $\bar{y}(x)$是问题

$$\begin{cases} \bar{y}_{\bar{x}x\bar{x}x} = 0,\ x \in \mathring{\omega}, \\ \bar{y}(0) = w_0,\ -\bar{y}_{xx} + h\bar{y}_{xxx}|_{x=0} = 0, \\ \bar{y}_{\bar{x}\bar{x}} + hy_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}}|_{x=l} = 0,\ \bar{y}(l) = w_1, \end{cases} \tag{71}$$

的解,而 $\mathring{y}(x)$ 由下述方程确定:

$$\begin{cases} \mathring{y}_{\bar{x}x\bar{x}x} = \varphi(x),\ x \in \mathring{\omega}, \\ \mathring{y}(0) = 0,\ -\mathring{y}_{xx} + h\mathring{y}_{xxx}|_{x=0} = \mathscr{M}_0 + h^2\varphi(h), \\ \mathring{y}_{\bar{x}\bar{x}} + h\mathring{y}_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}}|_{x=l} = \mathscr{M}_1 - h^2\varphi(l-h),\ \mathring{y}(l) = 0. \end{cases} \tag{72}$$

将问题(72)的方程乘上 $\mathring{y}(x)h$, 然后将所得的表达式按网格 $\mathring{\omega}$ 求和,再利用 § 1 中的格林公式(14)变换所得的关系式,并考虑到(72)的边界条件,求得

$$\|\mathring{y}\|_{2,0}^2 = (\varphi, \mathring{y})_\omega + \mathscr{M}_0\mathring{y}_{x,0} + \mathscr{M}_1\mathring{y}_{\bar{x},N}. \tag{73}$$

我们来估计所得关系式右端各项. 根据 § 1 的哥西不等式(15),

$$|(\varphi, \mathring{y})_\omega| \leqslant \|\varphi\|_0 \|\mathring{y}\|_0.$$

注意不等式(65)，我们得到

$$\|\mathring{y}\|_0 \leqslant \left[\sigma\|\mathring{y}\|_0^2 + \frac{1-\sigma}{M_0}\|\mathring{y}\|_{2,0}^2\right]^{1/2}, \quad 0 < \sigma < 1.$$

我们选取参数 σ 使 $\|\mathring{y}\|_0^2$ 与 $\|\mathring{y}\|_{2,0}^2$ 的系数相等，得到 $\|\mathring{y}\|_0 \leqslant \sqrt{(1+M_6)/M_6}\,\|\mathring{y}\|_2$，因此

$$|(\varphi, \mathring{y})_\omega| \leqslant \sqrt{(1+M_6)/M_6}\,\|\mathring{y}\|_2 \|\varphi\|_0.$$

在本章 §4 中(定理 3) 将证明，对于给定在均匀网格 $\bar{\omega}$ 上的任意网格函数 $v(x)$，

$$\|v_{\bar{x}}\|_{c(\omega^+)}^2 \leqslant M\|v\|_2^2, \quad M = \text{const} > 0. \tag{74}$$

利用这个不等式我们求得

$$|\mathscr{M}_0 \mathring{y}_{x,0} + \mathscr{M}_1 \mathring{y}_{\bar{x},N}| \leqslant (|\mathscr{M}_0| + |\mathscr{M}_1|)\sqrt{M}\,\|\mathring{y}\|_2.$$

由此并从等式(73)推出

$$\|\mathring{y}\|_{2,0}^2 \leqslant \left\{\sqrt{\frac{1+M_6}{M_6}}\|\varphi\|_0 + \sqrt{M}\,(|\mathscr{M}_0| + |\mathscr{M}_1|)\right\}\|\mathring{y}\|_2.$$

根据(65)有

$$\|\mathring{y}\|_{2,0}^2 \geqslant \frac{M_6}{1+M_6}\|\mathring{y}\|_2^2.$$

将这个不等式代入上一个不等式的左端，就得到问题(72)的解的先验估计

$$\|\mathring{y}\|_2 \leqslant \frac{1+M_6}{M_6}\left\{\sqrt{\frac{1+M_6}{M_6}}\|\varphi\|_0 + \sqrt{M}(|\mathscr{M}_0| + |\mathscr{M}_1|)\right\}.$$

我们来估计问题(71)的解．显然，

$$\bar{y}(x) = w_0 + \frac{w_1 - w_0}{l} x,$$

因而

$$\|\bar{y}\|_2 = \|\bar{y}\|_0 \leqslant \sqrt{l}\ \|\bar{y}\|_c \leqslant \sqrt{l}\ (|w_0| + |w_1|).$$

所以

$$\|y\|_2 \leqslant \|\mathring{y}\|_2 + \|\bar{y}\|_2 \leqslant \frac{1+M_6}{M_6}$$

$$\times \left\{\sqrt{\frac{1+M_6}{M_6}}\ \|\varphi\|_0 + \sqrt{M}(|\mathscr{M}_0| + |\mathscr{M}_1|)\right\}$$

$$+ \sqrt{l}\,(|w_0| + |w_1|).$$

这样就找到了问题(69)，(70)的解的估计. 利用第四章§6第四段的结果，容易验证，问题(69)，(70)以误差 $O(h^2)$ 逼近弹性支承杆的弯曲问题，即

$$\begin{cases} w^{(4)} = \varphi(x),\ 0 < x < l, \\ w(0) = w_0,\ -w''(0) = \mathscr{M}_0,\ w''(l) = \mathscr{M}_1,\ w(l) = w_1. \end{cases} \tag{75}$$

注意到这一事实，从所得先验估计推出问题(69)，(70)的解以速度 $O(h^2)$ 收敛于问题(75)的解.

6. 带有一个"自由端"的弹性杆的离散模型. 我们来求下述问题的先验估计：

$$\begin{cases} y_{\bar{x}x\bar{x}x} = \varphi(x),\ x \in \mathring{\omega}, \\ y(0) = 0,\ y_x - \dfrac{h}{2} y_{xx} + \dfrac{h^2}{2} y_{xxx}\Big|_{x=0} \\ \qquad = \dfrac{h^3}{2}\varphi(h), \\ y_{\bar{x}\bar{x},N} = \mathscr{M} + hQ + \dfrac{h^2}{2}\varphi(l), \\ -y_{\bar{x}\bar{x}\bar{x},N} = Q + h\left[\varphi(l-h) + \dfrac{l}{2}\varphi(l)\right]. \end{cases} \tag{76}$$

它是弹性杆的弯曲问题在网格 $\bar{\omega}$ 上的模拟，该杆的左端 $(x=0)$ 刚接，而右端处于外力作用下．将问题(76)的解表为两个函数 $\mathring{y}(x)$ 与 $\bar{y}(x)$ 之和的形式，其中

$$\bar{y}(x)=\left[\frac{h}{2}(\mathring{y}_{xx,0}-h\mathring{y}_{xxx,0})+\frac{h^3}{2}\varphi(h)\right]x,$$

而 $\mathring{y}(x)$ 是下述问题的解：

$$\mathring{y}_{\bar{x}x\bar{x}x}=\varphi(x),\ x\in\mathring{\omega},\tag{77}$$

$$\begin{cases}\mathring{y}(0)=0,\ \mathring{y}_{x,0}=0,\\ \mathring{y}_{\bar{x}\bar{x},N}=\mathscr{M}+hQ+\dfrac{h^2}{2}\varphi(l),\\ -\mathring{y}_{\bar{x}\bar{x}\bar{x},N}=Q+h\left[\varphi(l-h)+\dfrac{1}{2}\varphi(l)\right].\end{cases}\tag{78}$$

把方程(77)乘上 $\mathring{y}(x)h$ 并将它按网格 $\mathring{\omega}$ 求和．利用 §1 的格林公式(14)变换所得的恒等式，且注意到边界条件(78)，经过若干变换之后有

$$\|\mathring{y}\|_{2,0}=(\varphi,\mathring{y})_{\bar{\omega}}+Q\mathring{y}_N+\mathscr{M}\mathring{y}_{\bar{x},N}.\tag{79}$$

我们来估计这个关系式的右端．根据哥西不等式 $|(\varphi,\mathring{y})_{\bar{\omega}}|\leqslant\|\varphi\|_0\|\mathring{y}\|_0$．在本章 §5 (引理 6) 将证明，对给定在 $\bar{\omega}$ 上并满足条件 $v_0=v_l=0$ 的任意网格函数 $v(x)$，成立不等式

$$\|v\|_0^2\leqslant\frac{l^4}{12}\|v\|_{2,0}^2,\tag{80}$$

所以 $\|v\|_0^2\leqslant l^4/(12+l^4)\|v\|_2^2$．从而

$$|(\varphi,\mathring{y})_{\bar{\omega}}|\leqslant\frac{l^2}{\sqrt{12+l^4}}\|\varphi\|_0\|\mathring{y}\|_2.$$

根据同一不等式(80)

$$\|\mathring{y}\|_{2,0}^2\geqslant\frac{12}{12+l^4}\|\mathring{y}\|_2^2.$$

把这些估计式代入(79)得到

$$\|\mathring{y}\|_2^2 \leqslant \frac{12+l^4}{12}\left[\frac{l^2}{\sqrt{12+l^4}}\|\varphi\|_0\|\mathring{y}\|_2\right.$$

$$\left.+\ |Q|\,|\mathring{y}_N| + |\mathscr{M}|\,|\mathring{y}_{\bar{x},N}|\right]. \qquad (81)$$

在本章 § 4 将证明（定理 3），对给定在 $\bar{\omega}$ 上的任意网格函数 $v(x)$，成立不等式

$$\|v\|_c^2 \leqslant \bar{M}\|v\|_2^2,\ \bar{M} = \text{const} > 0. \qquad (82)$$

注意到这个不等式和不等式(74)，我们得到

$$|Q|\,|\mathring{y}_N| + |\mathscr{M}|\,|\mathring{y}_{\bar{x},N}| \leqslant (\bar{M}|Q| + M|\mathscr{M}|)\|\mathring{y}\|_2.$$

从这个不等式及不等式(81)得估计式

$$\|\mathring{y}\|_2 \leqslant \frac{12+l^4}{12}$$

$$\times\left[\frac{l^2}{\sqrt{12+l^4}}\|\varphi\|_0 + \bar{M}|Q| + M|\mathscr{M}|\right]. \qquad (83)$$

现在来估计函数 $\bar{y}(x)$. 显然

$$\|\bar{y}\|_2 \leqslant l^{3/2}\left[\left|\frac{h}{2}(\mathring{y}_{xx,0} - h\mathring{y}_{xxx,0})\right|\right.$$

$$\left.+\ \frac{h^3}{2}|\varphi(h)|\right].$$

但 $\quad \dfrac{h}{2}|\mathring{y}_{xx,0} - h\mathring{y}_{xxx,0}| = \dfrac{1}{2}|-2y_{\bar{x},1} + 3y_{\bar{x},2} - y_{\bar{x},3}|$，

根据不等式(74)有

$$h/2\,|\mathring{y}_{xx,0} - h\mathring{y}_{xxx,0}| \leqslant 3M\|\mathring{y}\|_2.$$

其次

$$\frac{h^3}{2}|\varphi(h)| = \frac{h^{5/2}}{2}[h\varphi^2(h)]^{1/2} \leqslant \frac{h^{5/2}}{2}\|\varphi\|_0$$

$$\leqslant \frac{l^{5/2}}{2}\|\varphi\|_0.$$

考虑到这些不等式，我们得到 $\|\bar{y}\|_2$ 的估计

$$\|\bar{y}\|_2 \leqslant 3Ml^{3/2}\|\mathring{y}\|_2 + \frac{l^4}{2}\|\varphi\|_0.$$

将估计(83)代入上式并利用三角不等式来估计 $y(x) = \mathring{y}+\bar{y}$ 的范数，我们得到

$$\|y\|_2 \leqslant M(\|\varphi\|_0 + |\mathscr{M}| + |Q|),\ M = \text{const} > 0.$$

像通常一样，从这个先验估计可推出问题(76)的解对微分方程相应问题的解的收敛性，但我们不去讲它了。

7. 理想铰接的二个杆件系统的离散模型. 我们来考察一下，如何研究具有连接条件的网格问题. 设 $\bar{\omega} = \{x = x_i | x_i = ih,\ i = 0,\ \pm 1,\ \cdots,\ \pm N,\ h = l/N\}$ 是给定在区间 $[-l, l]$ 上步长为 h 的均匀网格. 以 $\bar{\omega}_л$ 表示网格 $\bar{\omega}$ 中位于区间 $[-l, 0]$ 上的节点所组成的子集合，即

$$\bar{\omega}_л = \{x_i | i = -N, -N+1, \cdots, 0\}.$$

像定义 ω, $\mathring{\omega}$ 等等（参看 §1 第一段）那样，我们以 $\omega_л$, $\mathring{\omega}_л$, $\omega_л^+$, ${}^+\omega_л$ 表示 $\bar{\omega}_л$ 的子集合. 设 $\bar{\omega}_п$, $\omega_п$ 等等为 $\bar{\omega}$ 中位于 $[0, l]$ 上的节点所组成的相应的子集合.

在网格 $\bar{\omega}$ 上考察下述问题：

$$y_{\bar{x}x\bar{x}x} = \varphi(x),\ x \in \mathring{\omega}_л \cup \mathring{\omega}_п, \tag{84}$$

$$\left.\begin{aligned} &y_{\bar{x}\bar{x}} + hy_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}} = \mathscr{M}^- - h^2\varphi(-h),\ x = 0,\\ &-y_{xx} + hy_{xxx} = \mathscr{M}^+ + h^2\varphi(h),\ x = 0,\\ &y_{xxx} - y_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}} = \bar{\varphi} + 3h\varphi(0) + h^3\varphi_{\bar{x}x}(0),\ x = 0,\end{aligned}\right\} \tag{85}$$

$$\left.\begin{aligned} &y(-l) = 0,\ \ y_x - \frac{h}{2}y_{xx} + \frac{h^2}{2}y_{xxx}|_{x=-l}\\ &\qquad = \frac{h^3}{2}\varphi(-l+h),\\ &y_{\bar{x}} + \frac{h}{2}y_{\bar{x}\bar{x}} + \frac{h^2}{2}y_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}}|_{x=l}\\ &\qquad = -\frac{h^3}{2}\varphi(l-h),\ y(l) = 0.\end{aligned}\right\} \tag{86}$$

容易验证，问题(84)—(86)在网格 $\bar{\omega}$ 上以误差 $O(h^2)$ 逼近两个杆件系统的弯曲问题，此两个杆件在点 $x=0$ 处彼此理想铰接且在 $x=-l$ 与 $x=l$ 为刚接:

$$\left.\begin{aligned} &w^{(4)}=\varphi(x),\ -l<x<0,0<x<l,\\ &[w]|_{x=0}=0,\ w''(-0)=\mathscr{M}^-,\\ &-w''(+0)=\mathscr{M}^+,\ [w''']|_{x=0}=\bar{\varphi},\\ &w(-l)=w'(-l)=w'(l)=w(l)=0. \end{aligned}\right\} \qquad (87)$$

逼近问题(87)的连接条件的关系式 (85) 曾在第四章中建立(参看 § 6 中的公式(20)与(19),其中 $\alpha=\beta=0$).

我们来求问题(84)—(86)的解的先验估计. 将方程(84)乘上 $y(x)h$, 然后按网格 $\mathring{\omega}_{\text{I}}$ 与 $\mathring{\omega}_{\text{II}}$ 对它们求和,且将所得的关系式相加. 利用 § 1 中的网格格林公式(14)变换之后得到关系式:

$$\begin{aligned} &\|y_{\bar{x}x}\|^2_{L_2(\omega_{\text{I}})}+\|y_{\bar{x}x}\|^2_{L_2(\omega_{\text{II}})}+(y_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}}y^{(-1)}-y_{\bar{x}\bar{x}}y_{\bar{x}})_0\\ &\quad-(y_{xxx}y^{(+1)}-y_{xx}y_x)_{-l}+(y_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}}y^{(-1)}-y_{\bar{x}\bar{x}}y_{\bar{x}})_l\\ &\quad-(y_{xxx}y^{(+1)}-y_{xx}y_x)_0=(\varphi,y)_{\mathring{\omega}_{\text{I}}}+(\varphi,y)_{\mathring{\omega}_{\text{II}}}. \end{aligned}$$

利用连接条件 (85) 与边界条件 (86) 变换所得的恒等式的左端,我们得到下述能量恒等式:

$$\begin{aligned} &\|y_{\bar{x}x}\|^2_{L_2(\omega_{\text{I}})}+\|y_{\bar{x}x}\|^2_{L_2(\omega_{\text{II}})}+\frac{2}{h}\left(y_x^2(-l)+y_{\bar{x}}^2(l)\right)\\ &\quad=(\varphi,y)_\omega+\bar{\varphi}y(0)+\mathscr{M}^-y_{\bar{x}}(0)\\ &\qquad+\mathscr{M}^+y_x(0). \end{aligned} \qquad (88)$$

估计此恒等式的右端:

$$\begin{aligned} &|(\varphi,y)_\omega+\bar{\varphi}y(0)+\mathscr{M}^-y_{\bar{x}}(0)+\mathscr{M}^+y_x(0)|\\ &\quad\leqslant\|\varphi\|_0\|y\|_0+|\bar{\varphi}||y(0)|+|\mathscr{M}^-||y_{\bar{x}}(0)|\\ &\quad+|\mathscr{M}^+||y_x(0)|\leqslant\|\varphi\|_0\|y\|_0+|\bar{\varphi}|\|y\|_{C(\bar{\omega})}\\ &\quad+|\mathscr{M}^-|\|y_{\bar{x}}\|_{C(\omega^+_{\text{I}})}+|\mathscr{M}^+|\|y_{\bar{x}}\|_{C(\omega^+_{\text{II}})}. \end{aligned}$$

进一步利用ε-不等式并考虑到关系式(74),(82),得到估计式

$$|(\varphi, y)_\omega + \bar{\varphi} y(0) + \mathscr{M}^- y_{\bar{x}}(0) + \mathscr{M}^+ y_x(0)|$$
$$\leqslant \varepsilon(1 + M + \bar{M})(\|y\|^2_{W_2^2(\mathring{\omega}_Л)} + \|y\|^2_{W_2^2(\varpi_П)})$$
$$+ \frac{1}{4\varepsilon}(\|\varphi\|_0^2 + |\bar{\varphi}|^2 + |\mathscr{M}^-|^2 + |\mathscr{M}^+|^2). \quad (89)$$

我们来估计恒等式(88)左端的下界. 假定在§5引理2中 $\kappa_1 = 0$, $\kappa_0 = \frac{2}{h}$, $\varpi = {}^+\omega_Л$, 对给定在 ${}^+\omega_Л$ 上的函数 $v(x) = y_x(x)$, 得到估计式:

$$\|y_{\bar{x}x}\|^2_{L_2(\omega_Л)} + \frac{2}{h} y_x^2(-l) \geqslant \frac{1}{l(l-h)} \sum_{\omega_Л^+} y_{\bar{x}}^2 h$$
$$= \frac{1}{l(l-h)} \|y_{\bar{x}}\|^2_{L_2(\omega_Л^+)}. \quad (90)$$

因为 $y(-l) = 0$, 则令§5引理2中的 $\kappa_1 = 0$, $\varpi = \varpi_Л$ 并当 $\kappa_0 \to \infty$ 时取极限,我们确信成立不等式

$$\|y_{\bar{x}}\|^2_{L_2(\omega_Л^+)} \geqslant \frac{2}{l^2} \|y\|^2_{L_2(\varpi_Л)}.$$

考虑到这个估计式,我们从(90)求得

$$\|y_{\bar{x}x}\|^2_{L_2(\omega_Л)} + \frac{2}{h} y_x^2(-l) \geqslant \frac{2}{l^3(l-h)} \|y\|^2_{L_2(\varpi_Л)}.$$

假定 $h \leqslant l/2$, 则有估计式

$$\|y_{\bar{x}x}\|^2_{L_2(\omega_Л)} + \frac{2}{h} y_x^2(-l) \geqslant \frac{4}{l^4} \|y\|^2_{L_2(\varpi_Л)}.$$

从这个估计式推出

$$\|y_{\bar{x}x}\|^2_{L_2(\omega_Л)} + \frac{2}{h} y_x^2(-l) \geqslant \frac{4}{4 + l^4} \|y\|^2_{W_2^2(\varpi_Л)}. \quad (91)$$

类似地可证明估计式:

$$\|y_{\bar{x}x}\|^2_{L_2(\omega_П)} + \frac{2}{h} y_{\bar{x}}^2(l) \geqslant \frac{4}{4 + l^4} \|y\|^2_{W_2^2(\varpi_П)}. \quad (92)$$

回到能量恒等式(88). 注意到不等式(89),(91)及(92),

从(88)得到估计式

$$\left[\frac{4}{4+l^4}-\varepsilon(1+M+\bar{M})\right](\|y\|^2_{W_2^2(\varpi_{\text{Л}})}+\|y\|^2_{W_2^2(\varpi_{\text{П}})})$$
$$\leqslant\frac{1}{4\varepsilon}(\|\varphi\|_0^2+|\bar{\varphi}|^2+|\mathscr{M}^-|^2+|\mathscr{M}^+|^2).$$

此处令 $\varepsilon=2[(4+l^4)(1+M+\bar{M})]^{-1}$，我们得到问题(84)—(86)的解的先验估计：

$$\|y\|^2_{W_2^2(\varpi_{\text{Л}})}+\|y\|^2_{W_2^2(\varpi_{\text{П}})}\leqslant M(\|\varphi\|_0^2+|\bar{\varphi}|^2$$
$$+|\mathscr{M}^-|^2+|\mathscr{M}^+|^2),$$

其中 $M=\text{const}>0$.

从所得的先验估计用通常的办法可推出问题(84)—(86)的解对问题(87)的解的收敛速度的估计.

§ 3. 固有值的网格问题

当我们研究差分格式得出这样和那样的估计时，有必要将网格函数按适当的差分问题的固有函数展开. 在这一节我们研究最简单的网格固有值问题的基本性质. 我们将考察二阶差商算子和矩形区域中拉普拉斯算子的五点逼近的第一与第二问题. 所有讨论都是对均匀网格进行的.

1. 二阶差商算子的固有值的第一边值问题. 我们都知道，求

$$u''(x)+\lambda u=0,\ 0<x<l,\ u(0)=u(l)=0 \qquad (1)$$

的固有函数与固有值的问题就是求参数 λ 的值（固有值），使得齐次问题(1)有非平凡(不恒为 0 的)解 $u(x)$（固有函数).

问题(1)的网格模拟可以表达如下. 设在区间 $[0,l]$ 上引进以 $h=l/N$ 为步长的均匀网格 $\bar{\omega}$. 在网格 $\bar{\omega}$ 上给出问题(1)的差分逼近：

$$y_{\bar{x}x} + \lambda y = 0,\ x \in \omega,\ y_0 = y_N = 0. \tag{2}$$

要求参数值 λ (固有值),使得问题(2)有非平凡解 $y(x)$ (固有函数).

我们来求问题(2)的通解. 将方程(2)改写成下述形式:

$$y_{j-1} - 2\left(1 - \frac{h^2\lambda}{2}\right) y_j + y_{j+1} = 0,$$

$$j = 1, 2, \cdots, N-1. \tag{3}$$

引进记号

$$1 - \frac{h^2\lambda}{2} = \cos\alpha h. \tag{4}$$

利用记号(4),(3)的特征方程可化为形式

$$q^2 - 2\cos\alpha h q + 1 = 0.$$

这个方程的根是 $q_1 = e^{i\alpha h}$, $q_2 = e^{-i\alpha h}$. 因此,方程(2)的通解形式为

$$y(x) = C_1 e^{i\alpha h} + C_2 e^{-i\alpha h} = c_1 \sin\alpha x + c_2 \cos\alpha x.$$

常数 c_1 与 c_2 由(2)的边界条件确定:

$$y(0) = c_2 = 0,\ y(l) = c_1 \sin\alpha l = 0 \tag{5}$$

为了满足(5)的第二个关系式,或者 c_1 为零,或者 $\sin\alpha l$ 为零. 但因 $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$, 故 c_1 不能为零. 因此 $\sin\alpha l = 0$, 亦即 $\alpha = k\pi/l$, $k = \pm1, \pm2, \cdots$. 这样,问题(2)的解就是函数

$$\mu_k(x) = c \sin\frac{k\pi x}{l}, \qquad k = \pm1, \pm2, \cdots. \tag{6}$$

由(4)求得问题(2)的固有值就在数列

$$\lambda_k = \frac{4}{h^2}\sin^2\frac{k\pi h}{2l}, \qquad k = \pm1, \pm2, \cdots$$

之中. 注意,零不可能是问题(2)的固有值, 因为它所对应的解恒等于零. 在上述序列剩下的那些项中,只有 $(N-1)$ 项

彼此不同，例如 λ_k, $k=1,2,\cdots,N-1$. 这些就是问题(2)的固有值.

现在来证明，由关系式(6)确定的固有函数 $\mu_k(x)$, $k=1,2,\cdots,N-1$, 是彼此正交的. 实际上设固有值 λ_k 对应于固有函数 $\mu_k(x)$, 固有值 λ_m 对应于固有函数 $\mu_m(x)$. 设 $k\neq m$ 且 $1\leqslant k, m\leqslant N-1$. 将关系式

$$(\mu_k)_{\bar{x}x}+\lambda_k\mu_k=0,\ x\in\omega \tag{7}$$

与 $\mu_m(x)$ 作内积，又将关系式

$$(\mu_m)_{\bar{x}x}+\lambda_m\mu_m=0,\ x\in\omega$$

与 $\mu_k(x)$ 作内积，然后从第一个式子减去第二个，得到

$$\begin{aligned}0=&((\mu_k)_{\bar{x}x},\mu_m)_\omega-((\mu_m)_{\bar{x}x},\mu_k)_\omega\\&+(\lambda_k-\lambda_m)(\mu_k,\mu_m)_\omega.\end{aligned}$$

对右端前两项应用 §1 的第一差分格林公式(12)，得到

$$\begin{aligned}0=&-((\mu_k)_{\bar{x}},(\mu_m)_{\bar{x}})_{\omega^+}+((\mu_m)_{\bar{x}},(\mu_k)_{\bar{x}})_{\omega^+}\\&+(\lambda_k-\lambda_m)(\mu_k,\mu_m)_\omega\\=&(\lambda_k-\lambda_m)(\mu_k,\mu_m)_\omega.\end{aligned}$$

由于当 $k\neq m$, $1\leqslant k, m\leqslant N-1$ 时，$\lambda_k\neq\lambda_m$, 所以

$$(\mu_k,\mu_m)_\omega=0.$$

因此固有函数是正交的. 我们选择(6)中的常数 c, 使得固有函数的范数等于1. 直接计算表明

$$(\mu_k,\mu_k)_\omega=c^2l/2.$$

令 $c=\sqrt{2/l}$, 就得到 $\|\mu_k\|_0=1$.

令 $c=\sqrt{2/l}$, 计算固有函数(6)的左差商:

$$\begin{aligned}[\mu_k(x)]_{\bar{x}}&=\sqrt{2/l}\,\frac{\sin(k\pi x/l)-\sin(k\pi(x-h)/l)}{h}\\&=\sqrt{2/l}\,\frac{2\sin(k\pi h/(2l))}{h}\end{aligned}$$

$$\times \cos \frac{k\pi(x-h/2)}{l}$$

$$=\sqrt{\lambda_k}\sqrt{2/l}\ \cos(k\pi(x-h/2)/l).$$

将方程(7)与 $\mu_m(x)$ 作内积并应用 §1 的第一格林公式 (12) 变换所得的关系式

$$0=((\mu_k)_{\bar{x}x},\ \mu_m)_\omega+\lambda_k(\mu_k,\ \mu_m)_\omega$$
$$=-((\mu_k)_{\bar{x}},\ (\mu_m)_{\bar{x}})_{\omega^+}+\lambda_k(\mu_k,\ \mu_m)_\omega.$$

由此推出，当 $k\neq m$ 时

$$((\mu_k)_{\bar{x}},\ (\mu_m)_{\bar{x}})_{\omega^+}=0,$$

亦即固有函数的差商在内积 $(,)_{\omega^+}$ 意义下是正交的.

设 $f(x)$ 是 ω 上任意的网格函数(或是 $\bar{\omega}$ 上的网格函数并在 $x=0$ 与 $x=l$ 等于零). 将 $f(x)$ 按固有函数 $\{\mu_k(x)\}_1^{N-1}$ 展开，亦即将 $f(x)$ 表成和的形式

$$f(x)=\sum_{k=1}^{N-1} f_k\mu_k(x), \tag{8}$$

其中 f_k 是函数 $f(x)$ 的傅里叶系数. 将(8)与 $\mu_m(x)$ 作内积，求得

$$(f,\ \mu_m)_\omega=\sum_{k=1}^{N-1} f_k(\mu_k,\ \mu_m)_\omega=f_m.$$

将(8)左右端平方并与 1 作内积

$$(f^2,\ 1)_\omega=\left(\left(\sum_{k=1}^{N-1} f_k\mu_k(x)\right)^2,\ 1\right)$$
$$=\sum_{k,m=1}^{N-1} f_kf_m(\mu_k,\ \mu_m)_\omega=\sum_{k=1}^{N-1} f_k^2.$$

所得的关系式就是帕塞瓦等式的网格模拟.

我们来更详细地研究问题(2)的固有值 λ_k. 注意、当 k 从 1 变到 $N-1$ 时函数 $\sin\frac{k\pi h}{2l}$ 单调上升. 因此，当 $k<m$

时，$\lambda_k < \lambda_m$. 熟知，当 $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi/2$ 时，对函数 $(\sin\alpha)/\alpha$ 成立估计式

$$2/\pi \leqslant (\sin\alpha)/\alpha \leqslant 1.$$

因为

$$\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 \left(\frac{\sin(k\pi h/(2l))}{k\pi h/(2l)}\right)^2 = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 \left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2, \tag{9}$$

所以 $(2k/l)^2 \leqslant \lambda_k \leqslant (k\pi/l)^2$，特别地，

$$\lambda_k \geqslant \lambda_1 \geqslant 4/l^2.$$

实际上对第一固有值 λ_1 有更精确的下界估计. 从(9)有

$$\frac{d\lambda_k}{d\alpha} = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 \frac{\sin 2\alpha}{\alpha^3}(\alpha - \operatorname{tg}\alpha) < 0,$$

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

由此推出，当步长 h 增大时固有值减小，而由于在区间 $[0, l]$ 上问题(2)的网格 ω 的最大步长是 $h_0 = l/2$，所以

$$\lambda_1(h_0) = 8/l^2 \leqslant \lambda_1(h) \leqslant \lambda_k(h).$$

总结所得的关于问题 (2) 的固有函数与固有值的有关结果. 为了强调问题(1)与(2)的固有函数及固有值的相似性，我们并列地引入问题(1)的解的性质(见 295 页上的表).

2. 二阶差商算子的固有值的第二边值问题. 考虑问题

$$u''(x) + \lambda u = 0, \ 0 < x < l, \ u'(0) = u'(l) = 0$$

的网格模拟. 我们以误差 $O(h^2)$ 逼近边界条件，即

$$y_{\bar{x}x} + \lambda y = 0, \ x \in \omega,$$

$$y_{x,0} + \frac{h}{2}\lambda y_0 = 0, \quad y_{\bar{x},N} - \frac{h}{2}\lambda y_N = 0. \tag{17}$$

注意，在差分问题(17)的边界条件中出现固有值，虽然在被逼近的问题的边界条件中并没有固有值.

	问题 (1)	问题 (2)
固有函数	$u_k(x)=\sqrt{2/l}\ \sin\frac{k\pi x}{l}$, $k=1,2,\cdots$	$\mu_k(x)=\sqrt{2/l}\ \sin\frac{k\pi x}{l}$, $k=1,2,\cdots,N-1$ (10)
固有值	$\lambda_k=(k\pi/l)^2$, $k=1,2,\cdots$, 当 $k>m$ 时有 $\lambda_k>\lambda_m$	$\lambda_k=\frac{4}{h^2}\sin^2\frac{k\pi h}{2l}$, $k=1,2,\cdots,N-1$, (11) $(2k/l)^2\leqslant\lambda_k\leqslant(k\pi/l)^2$, 当 $k>m$ 时 $\lambda_k>\lambda_m$, $\lambda_1\geqslant 8/l^2$ (12)
固有函数的正交性	$\int_0^l u_k(x)u_m(x)dx=\delta_{k,m}$ 其中 $\delta_{k,m}$ 是克罗内克符号 $\delta_{k,m}=\begin{cases}1 & 当\ k=m\\ 0 & 当\ k\neq m\end{cases}$	$(\mu_k,\mu_m)_\omega$ $=\sum_\omega \mu_k(x)\mu_m(x)h$ $=\delta_{k,m}$, (13)
固有函数的导数(差商)	$u_k'(x)=\sqrt{\lambda_k}\sqrt{2/l}\cos\frac{k\pi x}{l}$, $k=1,2,\cdots$	$\mu_{k,\bar{x}}=\sqrt{\lambda_k}\sqrt{2/l}$ $\times\cos\frac{k\pi(x-h/2)}{l}$ $\equiv\sqrt{\lambda_k}\ \bar{\mu}_k(x)$, $k=1,2,\cdots,N-1$
固有函数导数(差商)的正交性	$\int_0^l u_k'(x)u_m'(x)dx=\lambda_k\delta_{k,m}$	$(\mu_{k\bar{x}},\mu_{m\bar{x}})_{\omega^+}$ $\equiv\sum_{\omega^+}\mu_{k\bar{x}}\mu_{m\bar{x}}h=\lambda_k\delta_{k,m}$
固有函数系的完备性	对任何函数 $f(x)\in L_2(0,l)$, $f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}f_k u_k(x)$, 其中 $f_k=\int_0^l f(x)u_k(x)dx$, $k=1,2,\cdots$	对给定在ω上的任何网格函数 $f(x)$ $f(x)=\sum_{k=1}^{N-1}f_k\mu_k(x)$, (14) 其中 $f_k=(f,\mu_k)_\omega$, (15) $k=1,2,\cdots,N-1$
帕塞瓦等式	$\|f\|^2_{L_2(0,l)}\equiv\int_0^l f^2dx$ $=\sum_{k=1}^{\infty}f_k^2$	$\|f\|^2_{L_2(\omega)}\equiv\|f\|_0^2\equiv(f,f)_\omega$ $=\sum_{k=1}^{N-1}f_k^2$ (16)

设 $\mathring{\Lambda}$ 是网格算子，它由以下关系式定义:

$$\mathring{\Lambda} v = \begin{cases} -\dfrac{2}{h} v_x, & x = 0, \\ -v_{\bar{x}x}, & x \in \omega, \\ \dfrac{2}{h} v_{\bar{x}}, & x = l. \end{cases} \tag{18}$$

于是问题(17)可改写为

$$\mathring{\Lambda} y = \lambda y, \qquad x \in \bar{\omega}.$$

问题(17)的解及其性质完全可象问题(2)那样得到，所以我们就不去讲它们如何得出，而立即引入结果一览表:

1) 固有函数

$$\mu_k(x) = \sqrt{2/l}\cos(k\pi x/l),\ k = 1, 2, \cdots, N-1,$$

$$\mu_0(x) = \sqrt{1/l},\quad \mu_N(x) = \sqrt{1/l}\cos(N\pi x/l). \tag{19}$$

2) 固有值

$$\lambda_k = \frac{4}{h^2}\sin^2\frac{k\pi h}{2l},\ k = 0, 1, \cdots, N, \tag{20}$$

$$(2k/l)^2 \leqslant \lambda_k \leqslant (k\pi/l)^2,\ k = 1, 2, \cdots, N, \tag{21}$$

当 $k > m$ 时 $$\lambda_k > \lambda_m, \tag{22}$$

$$\lambda_1 \geqslant 8/l^2,\ \lambda_0 = 0. \tag{23}$$

3) 固有函数的正交性

$$(\mu_k, \mu_m)_{\bar{\omega}} = \delta_{k,m}. \tag{24}$$

4) 固有函数的差商

$$(\mu_k(x))_{\bar{x}} = -\sqrt{\lambda_k}\sqrt{2/l}\sin k\pi((x - h/2)/l)$$

$$= \sqrt{\lambda_k}\,\bar{\mu}_k(x),\quad k = 1, 2, \cdots, N-1, \tag{25}$$

$$(\mu_N(x))_{\bar{x}} = -\sqrt{\lambda_N}\sqrt{1/l}\sin N\pi((x - h/2)/l)$$

$$= \sqrt{\lambda_N}\,\bar{\mu}_N(x).$$

5) 固有函数差商的正交性

$$(\mu_{k\bar{x}},\ \mu_{m\bar{x}})_{\omega^+} = \lambda_k \delta_{k,m}. \tag{26}$$

6）固有函数是网格 $\bar{\omega}$ 上的基. 对给定在 $\bar{\omega}$ 上的任意网格函数 $f(x)$，

$$f(x) = \sum_{k=0}^{N} f_k \mu_k(x), \tag{27}$$

其中

$$f_k = (f,\ \mu_k)_{\bar{\omega}},\quad k = 0, 1, \cdots, N, \tag{28}$$

是函数 $f(x)$的傅里叶系数.

7）帕塞瓦等式

$$\|f\|^2_{L_2(\bar{\omega})} = \|f\|^2_0 = (f, f)_{\bar{\omega}} = \sum_{k=0}^{N} f_k^2. \tag{29}$$

3. 拉普拉斯网格算子的固有值问题. 设在矩形

$$\bar{G} = \{0 \leqslant x_\alpha \leqslant l_\alpha,\ \alpha = 1, 2\}$$

中给定均匀的矩形网格 $\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2$. 设 $\omega = \omega_1 \times \omega_2$ 是这个网格的内节点的集合，而 $\gamma = \bar{\omega}\backslash\omega$ 是它的边界节点的集合. 在网格 $\bar{\omega}$ 上考虑如下固有值问题:

$$\begin{cases} \Lambda y \equiv -y_{\bar{x}_1 x_1} - y_{\bar{x}_2 x_2} = \lambda y, & x \in \omega, \\ y(x) = 0, & x \in \gamma. \end{cases} \tag{30}$$

容易看出,问题(30)可以进行分离变量且有解

$$\mu_k(x) = \mu_{1,k_1}(x_1)\mu_{2,k_2}(x_2),\quad \lambda_k = \lambda_{1,k_1} + \lambda_{2,k_2}, \tag{31}$$

$$k = (k_1, k_2),\quad k_\alpha = 1, 2, \cdots, N_\alpha - 1,\quad \alpha = 1, 2,$$

其中 $\mu_{\alpha,k_\alpha}(x_\alpha)$ 由关系式(10)当 $l = l_\alpha$, $k = k_\alpha$, $x = x_\alpha$ 时给出,而 $\lambda_{\alpha,k_\alpha}$ 由关系式(11)当 $l = l_\alpha$, $k = k_\alpha$, $h = h_\alpha = l_\alpha/N_\alpha$ 时给出. 问题(30)的固有函数(31)是正交的,亦即

$$(\mu_k(x),\ \mu_m(x))_\omega \equiv \sum_{\omega_1} h_1 \sum_{\omega_2} h_2 \mu_k(x_1, x_2)\mu_m(x_1, x_2) = \delta_{k,m}.$$

在网格 $\bar{\omega}$ 上再考虑一个固有值问题

$$\bar{\Lambda} y \equiv (\mathring{\Lambda}_1 + \mathring{\Lambda}_2) y = \lambda y, \qquad x \in \bar{\omega}, \tag{32}$$

其中算子 $\mathring{\Lambda}_\alpha$ 由关系式(18)当 $x = x_\alpha$, $l = l_\alpha$, $h = h_\alpha$, $\omega = \omega_\alpha$ 时确定. 问题(32)是矩形中二维拉普拉斯算子固有值的第二边值问题的网格模拟,象问题(30)一样,它可以进行分离变量且有如下的解:

$$\mu_k(x) = \mu_{1,k_1}(x_1)\mu_{2,k_2}(x_2), \quad \lambda_k = \lambda_{1,k_1} + \lambda_{2,k_2}, \tag{33}$$
$$k = (k_1, k_2), \ k_\alpha = 0, 1, \cdots, N_\alpha, \ \alpha = 1, 2,$$

其中 $\mu_{\alpha,k_\alpha}(x_\alpha)$ 由关系式(19)当 $l = l_\alpha$, $k = k_\alpha$, $x = x_\alpha$ 时给出,而 $\lambda_{\alpha,k_\alpha}$ 由关系式(20)当 $l = l_\alpha$, $k = k_\alpha$, $h = h_\alpha = l_\alpha/N_\alpha$ 时给出. 问题(32)的固有函数(33)是正交的:

$$(\mu_k(x), \ \mu_m(x))_{\bar{\omega}} = \delta_{k,m}.$$

§4. 嵌 入 定 理

在本章的 § 2 中当对区间上的网格问题的解进行先验估计时，我们碰到有必要比较同一函数的各种范数，比较范数时要求通过带有与网格无关常数的一种范数来估计另一种范数. 在研究多维网格问题时也会发生类似的情况.

在这一节将建立一系列这样的不等式，它们把给定在区间或矩形网格上的网格函数的各种范数联系起来. 我们将要考虑的只是这样的不等式,其中的常数既不依赖于函数本身，也不依赖于网格(函数定义在此网格上). 确立这些不等式的命题将称为嵌入定理.

1. 一个自变量网格函数的嵌入定理. 我们将研究给定在网格 $\bar{\omega} \in [0, l]$ 上的网格函数. 在这一段的一部分定理中将假定网格是均匀的，而在另一些定理中将不用均匀网格的假定. 先提及本段将要用到的关于网格函数范数的一些记号:

$$\|v\|_C = \max_{x\in\bar\omega}|v(x)|,\quad \|v_{\bar x}\|_C = \max_{x\in\omega^+}|v_{\bar x}(x)|;$$

$$\|v\|_0 = \|v\|_{L_2(\bar\omega)} = (v, v)_{\bar\omega}^{1/2},\quad \|v_{\bar x}\|_0 = (v_{\bar x}, v_{\bar x}]_{\omega}^{1/2},$$

$$\|v_{\bar x x}\|_0 = (v_{\bar x x}, v_{\bar x x})_{\omega}^{1/2}.$$

定理 1. 对于给定在任意非均匀网格 $\hat\omega$ 上且在 $x=0$ 与 $x=l$ 为零的任何网格函数 $v(x)$，成立不等式

$$\|v\|_C^2 \leqslant M_1\|v_{\bar x}]|_0^2, \tag{1}$$

其中 $M_1 = l/4$.

证明．对函数 $v(x)$ 成立表达式

$$v_i = \sum_{j=1}^{i} v_{\bar x,j}h_j,\quad v_i = -\sum_{j=i+1}^{N} v_{\bar x,j}h_j.$$

由此，利用 § 1 中的哥西不等式(15)得到

$$v_i^2 \leqslant x_i\sum_{j=1}^{i} v_{\bar x,j}^2h_j, \tag{2}$$

$$v_i^2 \leqslant (l - x_i)\sum_{j=i+1}^{N} v_{\bar x,j}^2h_j. \tag{3}$$

将不等式(2)乘以 $(l - x_i)$，不等式(3)乘以 x_i，然后将所得关系式相加再除以 l. 则得

$$v^2(x) \leqslant \frac{x(l-x)}{l}\|v_{\bar x}]|_0^2 \leqslant \frac{l}{4}\|v_{\bar x}]|_0^2,\qquad x\in\bar\omega.$$

由于这个不等式对任何 x 都成立，所以它对于使函数 $v^2(x)$ 达到最大值的点 $x = x_0$ 也正确．定理得证.

注 1．不等式 (1) (取常数 $M_1 = l$) 对于只在 $x = 0$ 或 $x = l$ 为零的函数也成立.

注 2．不等式 (1) (取 $M_1 = l/4$) 在下述意义下是精确的，即存在这样的网格 $\bar\omega$ 与函数 $v(x)$，使得(1)中的等号成立，在以点 $x = l/2$ 为节点的任何网格上，函数 $v(x) = |x - l/2|$ 就是一例.

把定理 1 推广到任意网格函数有

定理 2. 对给定在任意非均匀网格 $\bar{\omega}$ 上的任何网格函数 $v(x)$，成立不等式

$$\|v\|_C^2 \leqslant \varepsilon\|v_{\bar{x}}\|_0^2 + (1/\varepsilon + 1/l)\|v\|_0^2 \tag{4}$$

其中 ε 是任意的正常数.

证明. 从关系式

$$v_i^2 = v_j^2 + \sum_{k=j+1}^{i} (v^2)_{\bar{x},k} h_k, \qquad i \geqslant j,$$

$$v_i^2 = v_j^2 - \sum_{k=i+1}^{j} (v^2)_{\bar{x},k} h_k, \qquad i \leqslant j,$$

推出，当任何 $(x, y) \in \bar{\omega}$

$$v^2(x) \leqslant v^2(y) + (|(v^2)_{\bar{x}}|, 1)_{\omega^+}.$$

把 x 看成是固定的，将这个不等式与 1 作内积：

$$lv^2(x) \leqslant \|v\|_0^2 + l(|(v^2)_{\bar{x}}|, 1)_{\omega^+}. \tag{5}$$

容易验证，(这里 $v^{(-1)} = v_{i-1}$)

$$(v^2)_{\bar{x}} = (v + v^{(-1)})v_{\bar{x}}.$$

利用 §1 中的哥西不等式(15)与 ε-不等式(16)，我们得到

$$\begin{aligned}(|(v^2)_{\bar{x}}|, 1)_{\omega^+} &\leqslant (|v|, |v_{\bar{x}}|)_{\omega^+} + (|v^{(-1)}|, |v_{\bar{x}}|)_{\omega^+} \\ &\leqslant \varepsilon\|v_{\bar{x}}\|_0^2 + \frac{1}{2\varepsilon}\left[\sum_{x\in\omega^+} v^2(x-h)h + \sum_{x\in\omega^+} v^2(x)h\right] \\ &= \varepsilon\|v_{\bar{x}}\|_0^2 + \frac{1}{\varepsilon}\|v\|_0^2.\end{aligned}$$

把这个估计式代入(5)并将所得关系式除以 l，就得到不等式(4). 定理得证.

由定理 2 确立的不等式中可以将函数换成它的差商.

引理 1. 对于给定在均匀网格 $\bar{\omega}$ 上的任何网格函数 $v(x)$，成立不等式

$$\|v_{\bar{x}}\|_C^2 \leqslant \varepsilon\|v_{\bar{x}x}\|_0^2 + (1/\varepsilon + 1/l)\|v_{\bar{x}}\|_0^2. \tag{6}$$

证明．通过类似于证明不等式(5)的那种论证，我们得到

$$l v_{\bar{x}}^2(x) \leqslant \|v_{\bar{x}}\|_0^2 + l(|(v_{\bar{x}}^2)_x|, 1)_\omega. \tag{7}$$

因为

$$(v_{\bar{x}}^2)_x = (v_x + v_{\bar{x}})v_{\bar{x}x},$$

根据§1中的哥西不等式(15)及 ε-不等式(16)有

$$(|(v_{\bar{x}}^2)_x|, 1)_\omega \leqslant \varepsilon\|v_{\bar{x}x}\|_0^2 + \frac{1}{2\varepsilon}(v_{\bar{x}}^2 + v_x^2, 1)_\omega$$

$$\leqslant \varepsilon\|v_{\bar{x}x}\|_0^2 + \frac{1}{\varepsilon}\|v_{\bar{x}}\|_0^2.$$

把这个不等式代入(7)即得(6)．引理得证．

引理 2. 对于给定在均匀网格 $\bar{\omega}$ 上的任何网格函数 $v(x)$，成立不等式

$$\|v_{\bar{x}}\|_0^2 \leqslant \varepsilon\|v_{\bar{x}x}\|_0^2 + M(1/\varepsilon + 1/l^2)\|v\|_0^2, \tag{8}$$

其中 ε 是任意的正常数，而M是某个与 $\bar{\omega}$ 无关的正常数．假若函数在 $x=0$ 与 $x=l$ 等于零，则除了(8)之外，对它还成立更精确的不等式

$$\|v_{\bar{x}}\|_0^2 \leqslant \varepsilon\|v_{\bar{x}x}\|_0^2 + \frac{1}{4\varepsilon}\|v\|_0^2. \tag{9}$$

证明．将不等式

$$\left(l\sqrt{\alpha}\, v_{\bar{x}x} + \frac{1}{l\sqrt{\alpha}}v\right)^2 \geqslant 0$$

乘上 h 并对它按 $x \in \omega$ 求和，再利用§1中的格林公式(12)变换所得的关系式

$$l^2\alpha\|v_{\bar{x}x}\|_0^2 + \frac{1}{l^2\alpha}\|v\|_0^2 - 2\|v_{\bar{x}}\|_0^2 + 2(v_{\bar{x}}v|_{x=l}$$

$$- v_x v|_{x=0}) \geqslant 0.$$

若 $v(0)=v(l)=0$，则取 $l^2\alpha/2=\varepsilon$，我们得到(9)．在一般情况下，经过简单的计算之后求得

$$\|v_{\bar{x}}\|_0^2 \leqslant \frac{\alpha l^2}{2}\|v_{xx}\|_0^2 + \frac{1}{2\alpha l^2}\|v\|_0^2 + \beta l(v_x^2(0)$$

$$+ v_{\bar{x}}^2(l)) + \frac{1}{4\beta l}(v^2(0) + v^2(l)). \qquad (10)$$

我们来估计括号中的项. 在(4)中令 $\varepsilon = \gamma l$, 而在(6)中令 $\varepsilon = \delta l$, 我们得到

$$v^2(0) + v^2(l) \leqslant 2\|v\|_c^2 \leqslant 2\gamma l\|v_{\bar{x}}\|_0^2$$
$$+ 2(1/(\gamma l) + 1/l)\|v\|_0^2,$$
$$v_x^2(0) + v_{\bar{x}}^2(l) \leqslant 2\|v_{\bar{x}}\|_c^2 \leqslant 2\delta l\|v_{\bar{x}x}\|_0^2$$
$$+ 2(1/(\delta l) + 1/l)\|v_{\bar{x}}\|_0^2.$$

将这些估计式代入(10)并变换所得不等式,将有

$$\|v_{\bar{x}}\|_0^2 \leqslant l^2 \frac{\alpha/2 + 2\beta\delta}{1 - 2\beta - 2\beta/\delta - \gamma/(2\beta)}\|v_{\bar{x}x}\|_0^2$$
$$+ \frac{1}{2l^2}\frac{1/\alpha + 1/(\beta\gamma) + 1/\beta}{1 - 2\beta - 2\beta/\delta - \gamma/(2\beta)}\|v\|_0^2, \qquad (11)$$

其中 α, β, γ 与 δ 是满足条件

$$1 - 2\beta - 2\beta/\delta - \gamma/(2\beta) > 0 \qquad (12)$$

的任意的正常数.

我们指出,这些常数可以选得使 $\|v_{\bar{x}x}\|_0^2$ 的系数任意小. 记

$$\zeta = \frac{\alpha/2 + 2\beta\delta}{1 - 2\beta - 2\beta/\delta - \gamma/(2\beta)}, \qquad (13)$$

由此求出 δ. 有

$$\delta = \frac{1}{4\beta}\Big(\zeta - 2\beta\zeta - \alpha/2 - \gamma\zeta/(2\beta)$$
$$+ \sqrt{(\zeta - 2\beta\zeta - \alpha/2 - \gamma\zeta/(2\beta))^2 - 8\beta^2\zeta}\Big) > 0.$$

令根号下的表达式等于零. 于是

$$\delta = \sqrt{\zeta/2}. \qquad (14)$$

把 δ 的这个值代入(13)，由此求得

$$\beta=\frac{\zeta-\frac{\alpha}{2}+\sqrt{(\zeta-\alpha/2)^2-4\gamma\zeta(\zeta+3\sqrt{\zeta}/\sqrt{2})}}{4(\zeta+3\sqrt{\zeta}/\sqrt{2})}>0.$$

假定

$$\zeta-\alpha/2>0, \tag{15}$$

再令根号下的表达式等于零，于是

$$\beta=\sqrt{\zeta}\frac{1-\alpha/(2\zeta)}{4(3\sqrt{2}+\sqrt{\zeta})}, \tag{16}$$

$$\gamma=\sqrt{\zeta}\frac{(1-\alpha/(2\zeta))^2}{4(3/\sqrt{2}+\sqrt{\zeta})}. \tag{17}$$

我们指出，当满足条件(15)时，由关系式(14)，(16)及(17)所确定的常数 δ，β 与 γ 也满足条件(12).

现在例如令 $\alpha=\zeta$ 并注意到(14)，(16)与(17)，我们求出

$$\begin{aligned}M(\zeta)&=\frac{1/\alpha+1/(\beta\gamma)+1/\beta}{2(1-2\beta-2\beta/\delta-\gamma/(2\beta))}\\&=\frac{1/\zeta+2^7(3/\sqrt{2}+\sqrt{\zeta})^2/\zeta+8(3\sqrt{\zeta}/\sqrt{2}+1)/\zeta}{2\left(1-\frac{(\sqrt{\zeta}+\sqrt{2})}{4(3/\sqrt{2}+\sqrt{\zeta})}-\frac{1}{4}\right)}\\&=2\frac{(3/\sqrt{2}+\sqrt{\zeta})^2}{\zeta}\\&\quad\times\frac{1+2^7(3/\sqrt{2}+\sqrt{\zeta})^2+8(3\sqrt{\zeta}/\sqrt{2}+1)}{(7\sqrt{2}+2\sqrt{\zeta})(3/\sqrt{2}+\sqrt{\zeta})}\\&\leqslant M(1+1/\zeta).\end{aligned}$$

把这个估计式代入(11)并记 $l^2\zeta$ 为 ε，就得到不等式(8). 引理得证.

定理 3. 对于给定在均匀网格 ϖ 上的任何网格函数

$v(x)$，成立不等式

$$\|v\|_C^2 \leqslant \varepsilon\|v_{\bar{x}x}\|_0^2 + M(1/l + 1/\varepsilon^{\frac{1}{3}})\|v\|_0^2, \qquad (18)$$

$$\|v_{\bar{x}}\|_C^2 \leqslant \varepsilon\|v_{\bar{x}x}\|_0^2 + M(1/l + 1/\varepsilon^3)\|v\|_0^2, \qquad (19)$$

其中 $\varepsilon > 0$ 是任意的数，而M是某个既不依赖于网格 $\bar{\omega}$ 也与函数 $v(x)$ 无关的正常数.

证明. 先证不等式(18). 在(4)中令 $\varepsilon = \alpha l$, 而在(8)中令 $\varepsilon = \beta l^2$. 利用所提到的第二个不等式(8)来估计第一个不等式(4)中的 $\|v_{\bar{x}}\|_0^2$. 于是

$$\|v\|_c^2 \leqslant \alpha\beta l^3\|v_{\bar{x}x}\|_0^2 + \frac{1}{l}[M\alpha(1 + 1/\beta) + 1 + 1/\alpha]\|v\|_0^2. \qquad (20)$$

设 $\alpha\beta = \gamma$, $\beta = \gamma/\alpha$. 令

$$\alpha = \frac{\gamma^{1/3}}{1 + \gamma^{1/3}},$$

则有

$$M\alpha(1 + 1/\beta) + 1 + 1/\alpha = \frac{1 + \gamma^{\frac{2}{3}}}{\gamma^{1/3}}\left[1 + \frac{\gamma^{1/3}}{1 + \gamma^{1/3}} + M\frac{\gamma + \gamma^{2/3} + 1}{(1 + \gamma^{1/3})^3}\right] \leqslant M_1(1 + \gamma^{-1/3}).$$

令 $l^3\gamma = \varepsilon$ 且利用所得估计式，我们从(20)就可以推出(18)来.

现在来证明不等式(19). 在(6)中令 $\varepsilon = \alpha l$, 而在(8)中令 $\varepsilon = \beta l^2$. 再利用所提到的第二个不等式(8)来估计第一个不等式(6)中的 $\|v_{\bar{x}}\|_0^2$, 得到

$$\|v_{\bar{x}}\|_c^2 \leqslant l(\alpha + \beta/\alpha + \beta)\|v_{\bar{x}x}\|_0^2 + \frac{M}{l^3}(1 + 1/\alpha)(1 + 1/\beta)\|v\|_0^2. \qquad (21)$$

引进记号

$$\alpha + \beta/\alpha + \beta = \gamma$$

且用 α 与 γ 来表示 β:

$$\beta^{-1} = \frac{1 + 1/\alpha}{\gamma - \alpha}.$$

现在,例如令 $\alpha = \gamma/2$, 则有不等式

$$(1 + 1/\alpha)(1 + 1/\beta) = [1 + (2/\gamma)^3] \times \frac{1 + 2/\gamma + (2/\gamma)^2}{1 - 2/\gamma + (2/\gamma)^2} \leqslant 24(1 + \gamma^{-3}).$$

利用这个不等式估计(21)中的 $\|v\|_0^2$ 的系数,并令 $\gamma l = \varepsilon$, 就得到(19),定理得证.

2. 两个自变量网格函数的嵌入定理. 这一段将要研究的网格函数是给定在矩形区域 $\overline{G} = \{x = (x_1, x_2) | 0 \leqslant x_\alpha \leqslant l_\alpha, \alpha = 1, 2\}$ 中的矩形网格 $\overline{\omega} = \overline{\omega}_1 \times \overline{\omega}_2$ 上, 设 $\omega = \omega_1 \times \omega_2$ 是网格 $\overline{\omega}$ 的内节点的集合,而 $\gamma = \overline{\omega} \backslash \omega$ 是它的边界节点的集合.

对给在网格 $\overline{\omega}$ 上的网格函数 $v(x)$, 我们引进如下的范数:

$$\|v\|_c = \max_{x \in \overline{\omega}} |v(x)|, \qquad \|v\|_0^2 = \sum_{\overline{\omega}_1} \hbar_1 \sum_{\overline{\omega}_2} \hbar_2 v^2(x),$$

$$\|v_{\bar{x}_1}\|_0^2 = \sum_{\omega_1^+} h_1 \sum_{\overline{\omega}_2} \hbar_2 v_{\bar{x}_1}^2(x),$$

$$\|v_{\bar{x}_2}\|_0^2 = \sum_{\overline{\omega}_1} \hbar_1 \sum_{\omega_2^+} h_2 v_{\bar{x}_2}^2(x),$$

$$\|\nabla v\|_0^2 = \|v_{\bar{x}_1}\|_0^2 + \|v_{\bar{x}_2}\|_0^2, \quad \|v\|_1^2 = \|\nabla v\|_0^2 + \|v\|_0^2.$$

设

$$(u, v)_\gamma = \sum_{\gamma} u(x) v(x) \tau(x),$$

其中

$$\tau(x) = \begin{cases} \hbar_\alpha(x_\alpha), & x_\alpha \in \omega_\alpha, \ x_\beta = 0, \ l_\beta; \ \beta \neq \alpha, \\ [\hbar_1(x_1) + \hbar_2(x_2)]/2, & x_\alpha = 0, \ l_\alpha; \ \alpha = 1, 2. \end{cases} \tag{22}$$

它是函数 $u(x)$ 与 $v(x)$ 在边界上的迹的内积的网格模拟，而

$$\|v\|_0^1 = (v, v)_\gamma^{1/2}.$$

对于给定在均匀网格 $\bar{\omega}$ 上而在其边界 γ 上等于零的网格函数 $v(x)$，我们引进范数

$$\|v\|_{2,0}^2 = \sum_{\omega} h_1 h_2 (v_{\bar{x}_1 x_1}^2 + v_{\bar{x}_2 x_2}^2)$$

$$+ 2 \sum_{\omega_1^+} h_1 \sum_{\omega_2^+} h_2 v_{\bar{x}_1 \bar{x}_2}^2.$$

定理 4. 对于给定在任意非均匀网格 $\bar{\omega}$ 上的任何网格函数 $v(x)$，成立不等式

$$\|v\|_0^{\prime 2} \leqslant \varepsilon \|\nabla v\|_0^2 + M_2(\varepsilon) \|v\|_0^2,$$

其中 ε 是任意的正常数，而

$$M_2(\varepsilon) = \frac{2(l_1 + l_2)}{l_1 l_2} + \frac{8}{\varepsilon}.$$

证明．对任一固定的 x_2，根据定理 2，对函数 $v(x)$ 成立不等式

$$v^2(0, x_2) + v^2(l_1, x_2)$$
$$\leqslant 2\varepsilon_1 \sum_{\omega_1^+} v_{\bar{x}_1}^2(x) h_1 + 2(1/l_1 + 1/\varepsilon_1)$$
$$\times \sum_{\bar{\omega}_1} v^2(x) \hbar_1,$$

将这个不等式乘上 $\hbar_2(x_2)$ 然后按 $\bar{\omega}_2$ 求和，就有

$$\sum_{\bar{\omega}_2} [v^2(0, x_2)\hbar_2 + v^2(l_1, x_2)\hbar_2]$$
$$\leqslant 2\varepsilon_1 \|v_{\bar{x}_1}\|_0^2 + 2(1/l_1 + 1/\varepsilon_1)\|v\|_0^2.$$

类似地可证明不等式

$$\sum_{\bar{\omega}_1} [v^2(x_1, 0)\hbar_1 + v^2(x_1, l_2)\hbar_1]$$
$$\leqslant 2\varepsilon_1 \|v_{\bar{x}_2}\|_0^2 + 2(1/l_2 + 1/\varepsilon_1)\|v\|_0^2.$$

将最后两个不等式相加并令 $2\varepsilon_1=\varepsilon$ 就得到定理的结论.

定理 5. 对于给定在均匀网格 $\bar{\omega}$ 上且在边界 γ 上等于零的任何网格函数 $v(x)$，成立不等式

$$\|v\|_c \leqslant M_3\|v\|_{2,0}$$

其中
$$M_3^2=\frac{1}{32}\left[\pi\ (l_1^2+l_2^2)+\frac{2l_1^3l_2^3}{(l_1^2+l_2^2)^2}\right].$$

证明. 设 $\mu_k(x)$ 是网格 $\bar{\omega}$ 上满足第一类边界条件的拉普拉斯网格算子的固有函数. 把函数 $v(x)$ 按函数 $\mu_k(x)$ 展开:

$$v(x)=\sum_k v_k\mu_k(x),\qquad k=(k_1,k_2).$$

根据 § 3 的(31)式知函数 $\mu_k(x)$ 是一致有界的，因而

$$v^2(x)=\Big(\sum_k\ v_k\mu_k\ (x)\Big)^2\leqslant\frac{4}{l_1l_2}\Big(\sum_k|v_k|\Big)^2. \tag{23}$$

估计不等式(23)右端的和的平方:

$$\Big(\sum_k|v_k|\Big)^2=\Big(\sum_k|v_k|\lambda_k\lambda_k^{-1}\Big)^2$$
$$\leqslant\sum_k v_k^2\lambda_k^2\sum_k\lambda_k^{-2}, \tag{24}$$

其中 λ_k 是拉普拉斯网格算子的固有值. 利用固有函数 $\mu_k(x)$ 的正交性及其差商的正交性 (参看 § 3 的问题 (2) 与问题 (30))，求得

$$\sum_k\ v_k^2\lambda_k^2=\sum_{k_1=1}^{N_1-1}\ \sum_{k_2=1}^{N_2-1}v_{k_1k_2}^2(\lambda_{k_1}^2+2\lambda_{k_1}\lambda_{k_2}+\lambda_{k_2}^2)$$
$$=\|v_{\bar{x}_1x_1}\|_0^2+2\|v_{\bar{x}_1\bar{x}_2}\|_0^2+\|v_{\bar{x}_2x_2}\|_0^2=\|v\|_{2,0}^2.$$

由此及关系式(24)，(23)推出估计

$$\|v\|_c^2\leqslant M\|v\|_{2,0}^2, \tag{25}$$

其中

$$M=\frac{4}{l_1l_2}\sum_k\lambda_k^{-2}.$$

我们来估计常数M. 因为

$$\sum_k \lambda_k^{-2} = \lambda_1^{-2} + \sum_{\substack{k_1=1 \\ k_1+k_2>2}}^{N_1-1} \sum_{k_2=1}^{N_2-1} \lambda_k^{-2},$$

则根据 § 3 的公式(31),(11)及(12)有

$$\sum_k \lambda_k^{-2} \leqslant \left(\frac{8}{l_1^2} + \frac{8}{l_2^2}\right)^{-2} +$$

$$\sum_{\substack{k_1=1 \\ k_1+k_2>2}}^{N_1-1} \sum_{k_2=1}^{N_2-1} \left(\frac{4}{l_1^2} k_1^2 + \frac{4}{l_2^2} k_2^2\right)^2 \leqslant \left[\frac{l_1^2 l_2^2}{8\,(l_1^2 + l_2^2)}\right]^2$$

$$+ \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\left(\dfrac{4}{l_1^2}\cos^2\varphi + \dfrac{4}{l_2^2}\sin^2\varphi\right)} \int_1^\infty \frac{dr}{r^3}$$

$$= \left[\frac{l_1^2 l_2^2}{8\,(l_1^2 + l_2^2)}\right]^2 + \frac{\pi l_1 l_2 (l_1^2 + l_2^2)}{2^7},$$

因为[1)]

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2\varphi d\varphi}{(a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi)^2} = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2\varphi d\varphi}{(a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi)^2}$$

$$= \frac{\pi}{4\,ab^3}.$$

把这个估计式代入(25)就得到定理的结论.

§ 5. 某些算子的下界估计

在本章 § 2 中研究一维模型时,在某些阶段上我们需要象

$$[y, y] \geqslant M\|y\|_0^2, \quad M = \text{const} > 0 \tag{1}$$

的估计式, 其中 $[u, v] = (\Lambda u, v)_\omega$ 或者 $[u, v] = (\bar{\Lambda} u, v)_\omega$, 而 Λ 与 $\bar{\Lambda}$ 是相应的微分算子及其边界条件的逼近. § 2

---

1) 例如参看: Градштейн И. С., Рыжик И. М., 的书, «积分, 求和、级数和乘积表», 其中的公式 3.642.3, 1971 年莫斯科科学出版社.

中所考虑的全部算子在相应的内积意义下都是自共轭的，而对于自共轭算子成立估计式

$$\lambda_{\min}(v, v) \leqslant (Av, v),$$

其中 $\lambda_{\min}$ 是算子的最小固有值，亦即

$$\lambda_{\min} = \min\lambda(A).$$

由此可知，不等式(1)给出对应的网格算子最小固有值的下界估计.

这一节将对作用在一个或二个自变量网格函数上的某些网格算子建立估计式(1). 为了不重复同一类型的论证，在叙述所要证明的结论时我们不用算子的术语，而用与所估计的算子有着明显关系的二次型 $[v, v]$ 的术语.

1. 一个自变量的网格函数. 我们来讨论给定在网格 $\bar{\omega}$ 上的网格函数，网格 $\bar{\omega}$ 位于区间 $[0, l]$ 上.

引理 1（弗利得李克斯不等式）. 对于给定在以 h 为步长的均匀网格 $\bar{\omega}$ 上且在 $x=0$ 与 $x=l$ 等于零的任何网格函数 $v(x)$，成立不等式

$$\|v_{\bar{x}}\|_0^2 \geqslant M_1\|v\|_0^2, \tag{2}$$

其中

$$M_1 = \left[\frac{2\sin(\pi h/(2l))}{h}\right]^2.$$

证明. 根据 §1 中的差分格林公式(12)成立如下关系式：

$$\|v_{\bar{x}}\|_0^2 = -(v_{\bar{x}x}, v)_\omega.$$

因此，为了得到(2)只要估计带有第一类边界条件的二阶差商算子就足够了. 在 §3 中我们曾研究了相应的固有值问题，并特别指出这个问题的最小固有值等于 M_1. 由此推出不等式(2)，引理得证.

注 1. 带有常数 M_1 的不等式(2)在下述意义下是精确的，即若取 §3 中问题(2)的第一个固有函数当作 $v(x)$，那么

不等式(2)就变成等式.

注 2. 不等式(2)中常数 M_1 与步长 h 有关,但根据§3中的关系式 (12) 它可以有一个与 h 无关的下界估计. 即当 $h \leqslant l/2$ 时有估计式 $M_1 \geqslant 8/l^2$.

注 3. 若令常数 $M_1 = 8/l^2$(见引理 2),则对任意非均匀网格,不等式 (2) 仍然成立.

注 4. 对于只在一个端点等于零(或 $x=0$ 或 $x=l$) 的函数,不等式 (2) 也成立,但不等式中的常数要大些 (见引理 2 的注 2).

注 5. 若 $v(x)$ 是 $\bar{\omega}$ 上的任意网格函数,则不等式(2)一般说来不成立. 函数 $v(x)=\text{const}$, $x\in\bar{\omega}$, 就是一例, 这时 (2) 的左端为零. 对于任意函数, 将在引理 2 和引理 3 建立类似于(2)的不等式.

引理 2. 对于给定在任意非均匀网格 $\bar{\omega}$ 上的任何网格函数 $v(x)$, 成立不等式

$$\|v_{\bar{x}}\|_0^2 + \kappa_0 v^2(0) + \kappa_1 v^2(l) \geqslant M_2 \|v\|_0^2, \tag{3}$$

其中 κ_0 与 κ_1 是非负常数,且其和为正数,而

$$M_2 = \frac{8(\kappa_0+\kappa_1+l\kappa_0\kappa_1)^2}{l(2+l\kappa_0)(2+l\kappa_1)(2\kappa_0+2\kappa_1+l\kappa_0\kappa_1)}. \tag{4}$$

若 $v(0)=v(l)=0$, 则不等式(3)具有形式

$$\|v_{\bar{x}}\|_0^2 \geqslant \frac{8}{l^2}\|v\|_0^2. \tag{5}$$

我们以连续变量的函数为例来说明证明的思想. 对任何光滑函数 $v(x)$ 有恒等式

$$v(x) = v(0) + \int_0^x v'(\xi)d\xi.$$

将此恒等式乘方,并应用哥西-布雅科夫斯基不等式与§1中的 ε-不等式(16),则有

$$v^2(x) \leqslant (1+\varepsilon_0)v^2(0) + (1+1/\varepsilon_0)x\int_0^x v'^2(\xi)d\xi.$$

设 $x \leqslant y \leqslant l$. 则

$$v^2(x) \leqslant (1+\varepsilon_0)v^2(0) + (1+1/\varepsilon_0)x\int_0^y v'^2(\xi)d\xi.$$

对 x 由 0 到 y 积分这个不等式，我们得到

$$\int_0^y v^2(x)\,dx \leqslant (1+\varepsilon_0)yv^2(0) + (1+1/\varepsilon_0)\frac{y^2}{2}\int_0^y v'^2(\xi)d\xi.$$

类似地可证不等式

$$\int_y^l v^2(x)\,dx \leqslant (1+\varepsilon_1)(l-y)v^2(l) + (1+1/\varepsilon_1)\frac{(l-y)^2}{2}\int_y^l v'^2(\xi)d\xi.$$

现在我们选择 $y\in[0,l]$，使得两个不等式中的积分的系数相等. 当 $y=y_0$ 时将是如此，其中

$$y_0 = \frac{l\sqrt{1+1/\varepsilon_1}}{\sqrt{1+1/\varepsilon_0}+\sqrt{1+1/\varepsilon_1}}.$$

对这个 y 值，将上述两个不等式相加就有

$$\int_0^l v^2(x)\,dx \leqslant \frac{l(1+\varepsilon_0)\sqrt{1+1/\varepsilon_0}}{\sqrt{1+1/\varepsilon_0}+\sqrt{1+1/\varepsilon_1}}v^2(0) + \frac{l(1+\varepsilon_1)\sqrt{1+1/\varepsilon_0}}{\sqrt{1+1/\varepsilon_0}+\sqrt{1+1/\varepsilon_1}}v^2(l) + \frac{l^2}{2}\frac{(1+1/\varepsilon_0)(1+1/\varepsilon_1)}{(\sqrt{1+1/\varepsilon_0}+\sqrt{1+1/\varepsilon_1})^2} \times\int_0^l v'^2(x)\,dx.$$

引理的证明. 现在我们对给定在 ϖ 上的网格函数来实

现这种想法. 由于点 $y=y_0$ 可能不属于网格 $\bar{\omega}$, 所以讨论较为复杂些.

对任何网格函数 $v(x)=v_i$ 有恒等式

$$v_i=v_0+\sum_{j=1}^{i} v_{\bar{x},j}h_j.$$

把这个恒等式两端乘方,并利用 § 1 中的哥西不等式 (15) 与 ε-不等式(16)估计右端,则有

$$v_i^2\leqslant(1+\varepsilon_0)v_0^2+(1+1/\varepsilon_0)x_i\sum_{j=1}^{i} v_{\bar{x},j}^2h_j. \tag{6}$$

设 $x_k\in\bar{\omega}$. 则对 $x_i\leqslant x_{k-1}$ 从关系式(6)求出

$$v_i^2\leqslant(1+\varepsilon_0)v_0^2+(1+1/\varepsilon_0)x_i\sum_{j=1}^{k} v_{\bar{x},j}^2h_j.$$

把这个不等式乘以 $\hbar_i$ 然后按 i 由 0 至 $K-1$ 求和. 注意到

$$\sum_{j=1}^{k-1}x_j\hbar_j=\sum_{j=1}^{k-1}x_j\frac{x_{j+1}-x_{j-1}}{2}=\frac{x_kx_{k-1}}{2},$$

我们有

$$\sum_{j=0}^{k-1} v_j^2\hbar_j\leqslant(1+\varepsilon_0)\left(x_k-\frac{h_k}{2}\right)v_0^2$$

$$+(1+1/\varepsilon_0)\frac{x_kx_{k-1}}{2}\sum_{j=1}^{k} v_{\bar{x},j}^2h_j. \tag{7}$$

现在令不等式 (6) 中的 $i=k$, 并乘上 $\varepsilon\hbar_k$, 其中 $0\leqslant\varepsilon\leqslant1$, 再与(7)相加:

$$\sum_{j=0}^{k-1} v_j^2\hbar_j+\varepsilon v_k^2\hbar_k\leqslant(1+\varepsilon_0)\left(x_k-\frac{h_k}{2}+\varepsilon\hbar_k\right)v_0^2$$

$$+(1+1/\varepsilon_0)\frac{x_k(x_{k-1}+2\varepsilon\hbar_k)}{2}$$

$$\times\sum_{j=1}^{k} v_{\bar{x},j}^2h_j. \tag{8}$$

令

$$\eta = x_k - \frac{h_k}{2} + \varepsilon \hbar_k$$

$$= x_k - (1-\varepsilon)\frac{h_k}{2} + \varepsilon \frac{h_{k+1}}{2} \qquad (9)$$

且注意到，当 $x \in \varpi$ 与 $\varepsilon \in [0, 1]$ 时 η 可取 $[0, l]$ 中的任何值．容易验证，

$$x_k(x_{k-1} + 2\varepsilon \hbar_k) = x_k^2 + x_k(-(1-\varepsilon)h_k + \varepsilon h_{k+1}) \leqslant \eta^2.$$

考虑到这种情况，从关系式(8)得到不等式

$$\sum_{j=0}^{k-1} v_j^2 \hbar_j + \varepsilon v_k^2 \hbar_k \leqslant (1+\varepsilon_0)\eta v_0^2$$

$$+ (1 + 1/\varepsilon_0)\frac{\eta^2}{2}\sum_{j=1}^{k} v_{\bar{x},j}^2 h_j. \qquad (10)$$

从恒等式

$$v_i = v_N - \sum_{j=i+1}^{N} v_{\bar{x},j} h_j$$

出发，经过类似前面那样的讨论，可以证明不等式

$$\sum_{j=k+1}^{N} v_j^2 \hbar_j + (1-\varepsilon) v_k^2 \hbar_k \leqslant (1+\varepsilon_1)(l-\eta) v_N^2$$

$$+ (1 + 1/\varepsilon_1)\frac{(l-\eta)^2}{2}\sum_{j=k+1}^{N} v_{\bar{x},j}^2 h_j. \qquad (11)$$

在不等式(10)与(11)中令

$$\eta = \frac{l\sqrt{1+1/\varepsilon_1}}{\sqrt{1+1/\varepsilon_0} + \sqrt{1+1/\varepsilon_1}},$$

并将它们相加，经过变换之后得到

$$\|v_{\bar{x}}\|_0^2 + \frac{2\varepsilon_0}{l}\left(1 + \sqrt{\frac{1+1/\varepsilon_0}{\sqrt{1+1/\varepsilon_1}}}\right) v^2(0)$$

$$+\frac{2\varepsilon_1}{l}\left(1+\sqrt{\frac{1+1/\varepsilon_1}{1+1/\varepsilon_0}}\right)v^2(l)$$

$$\geqslant \frac{2(\sqrt{1+1/\varepsilon_0}+\sqrt{1+1/\varepsilon_1})^2}{l^2(1+1/\varepsilon_0)(1+1/\varepsilon_1)}$$

$$\times \|v\|_0^2.$$

剩下的是要用 κ_0 与 κ_1 来表示 ε_0 与 ε_1. 我们令 $v^2(0)$ 的系数等于 κ_0, 而 $v^2(l)$ 的系数等于 κ_1, 即得这种表达式,亦即

$$\begin{cases}\sqrt{\dfrac{1+1/\varepsilon_0}{1+1/\varepsilon_1}}=\dfrac{l\kappa_0}{2\varepsilon_0}-1\equiv\dfrac{\bar{\kappa}_0}{\varepsilon_0}-1,\\ \sqrt{\dfrac{1+1/\varepsilon_1}{1+1/\varepsilon_0}}=\dfrac{l\kappa_1}{2\varepsilon_1}-1\equiv\dfrac{\bar{\kappa}_1}{\varepsilon_1}-1,\end{cases}\tag{12}$$

其中

$$\bar{\kappa}_0=l\kappa_0/2,\ \ \bar{\kappa}_1=l\kappa_1/2.$$

从公式(12)求出

$$\frac{\bar{\kappa}_0}{\varepsilon_0}-1=\left(\frac{\bar{\kappa}_1}{\varepsilon_1}-1\right)^{-1},$$

亦即

$$\frac{1}{\varepsilon_0}=\frac{1}{\bar{\kappa}_0}+\frac{1}{\bar{\kappa}_0}\left(\frac{\bar{\kappa}_1}{\varepsilon_1}-1\right)^{-1}.\tag{13}$$

将 ε_0^{-1} 的值代入方程(12)的第二式然后两端乘方,再经若干变换之后就得关于 ε_1 的方程

$$(1+1/\bar{\kappa}_0)\bar{\kappa}_1^2/\varepsilon_1=2\bar{\kappa}_1+\bar{\kappa}_1/\bar{\kappa}_0+1.$$

由此

$$\varepsilon_1=\frac{\bar{\kappa}_1^2(\bar{\kappa}_0+1)}{2\bar{\kappa}_0\bar{\kappa}_1+\bar{\kappa}_0+\bar{\kappa}_1}.$$

把 ε_1 的这个值代入(13)式,求出

$$\varepsilon_0=\frac{\bar{\kappa}_0^2(\bar{\kappa}_1+1)}{2\bar{\kappa}_0\bar{\kappa}_1+\bar{\kappa}_0+\bar{\kappa}_1}.$$

现在用 κ_0 与 κ_1 来表达常数

$$M_2 = \frac{2(\sqrt{1+1/\varepsilon_0} + \sqrt{1+1/\varepsilon_1})^2}{l^2(1+1/\varepsilon_0)(1+1/\varepsilon_1)}.$$

从公式(12)推出

$$\frac{\bar{\kappa}_0}{\varepsilon_0} = \frac{\sqrt{1+1/\varepsilon_0} + \sqrt{1+1/\varepsilon_1}}{\sqrt{1+1/\varepsilon_0}},$$

$$\frac{\bar{\kappa}_1}{\varepsilon_1} = \frac{\sqrt{1+1/\varepsilon_0} + \sqrt{1+1/\varepsilon_1}}{\sqrt{1+1/\varepsilon_1}},$$

所以

$$M_2 = \frac{1}{l^2} 2\,\bar{\kappa}_0\bar{\kappa}_1/\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon_1(1+\varepsilon_0)(1+\varepsilon_1)}.$$

将 ε_0 和 ε_1 的值代入这里，得到

$$M_2 = \frac{8(\kappa_0+\kappa_1+l\kappa_0\kappa_1)^2}{l(2+l\kappa_0)(2+l\kappa_1)(2\kappa_0+2\kappa_1+l\kappa_0\kappa_1)}.$$

不等式(3)得证.

若令(3)中的 $v(0)=v(l)=0$，并在(4)中当 $\kappa_0\to\infty$ 与 $\kappa_1\to\infty$ 时取极限就得到不等式(5). 引理得证.

注 1. 若网格函数 $v(x)$ 在区间 $[0, l]$ 的一个端点上等于零，例如在 $x=0$. 那么在公式(4)中当 $\kappa_0\to\infty$ 时可以取极限

$$\|v_{\bar{x}}\|_0^2 + \kappa_1 v^2(l) \geqslant M_3\|v\|_0^2, \tag{14}$$

其中

$$M_3 = \frac{8}{l^2}\left(\frac{1+l\kappa_1}{2+l\kappa_1}\right)^2.$$

注 2. 在同样的假定下可以通过 $\|v\|_0^2$ 得到 $\|v_{\bar{x}}\|_0^2$ 的下界估计. 为此在(14)中令 $\kappa_1=0$：

$$\|v_{\bar{x}}\|_0^2 \geqslant \frac{2}{l^2}\|v\|_0^2. \tag{15}$$

注 3. 若在(3)中令 κ_0 为零，则有下述形式的估计式

$$\|v_{\bar{x}}\|_0^2 + \kappa_1 v^2(l) \geqslant M_4\|v\|_0^2, \tag{16}$$

其中

$$M_4 = \frac{2\kappa_1}{l(2 + l\kappa_1)}.$$

引理 3（庞加莱不等式）. 对于给定在任意非均匀网格 $\bar{\omega}$ 上的任何网格函数 $v(x)$，成立不等式

$$\|v_{\bar{x}}\|_0^2 \geqslant \frac{4}{l^2}\|v\|_0^2 - \frac{4}{l^3}(v, 1)_{\bar{\omega}}^2. \tag{17}$$

证明．设 x_i 与 x_k 为网格 $\bar{\omega}$ 的任意两个节点．因为当 $x_i < x_k$ 时满足关系式

$$(v_i - v_k)^2 = \left(\sum_{j=i+1}^{k} v_{\bar{x},j}h_j\right)^2$$

$$\leqslant (x_k - x_i)\sum_{j=i+1}^{k} v_{\bar{x},j}^2 h_j,$$

而当 $x_i > x_k$ 时满足关系式

$$(v_i - v_k)^2 = \left(\sum_{j=k+1}^{i} v_{\bar{x},j}h_j\right)^2$$

$$\leqslant (x_i - x_k)\sum_{j=k+1}^{i} v_{\bar{x},j}^2 h_j,$$

因此在任何情况下都成立不等式

$$(v_i - v_k)^2 \leqslant |x_i - x_k|\,\|v_{\bar{x}}\|_0^2.$$

将此不等式乘以 $\hbar_i$ 然后按 i 由 0 至 N 求和，经若干变换之后即得

$$\|v\|_0^2 + l v_k^2 - 2(v, 1)_{\bar{\omega}} v_k \leqslant \frac{l^2}{2}\|v_{\bar{x}}\|_0^2,$$

因为

$$\sum_{i=0}^{N} |x_i - x_k|\hbar_i = \int_0^l |t - x_k|\,dt$$

$$= \int_0^{x_k}(x_k - t)\,dt + \int_{x_k}^{l}(t - x_k)\,dt$$

$$= \frac{l^2}{2} - (l - x_k)x_k \leqslant \frac{l^2}{2}.$$

将所得不等式乘以 $\hbar_k$ 然后按 k 从 0 至 N 求和，我们求得

$$2l\|v\|_0^2 - 2(v, 1)_{\bar\omega}^2 \leqslant \frac{l^3}{2}\|v_{\bar x}\|_0^2,$$

由此推出(17). 引理得证.

引理 4. 若非均匀网格 $\bar\omega$ 使得

$$\sum_{\bar\omega \cap [a, b]} \hbar(x) \geqslant m, \tag{18}$$

其中 $[a, b] \subset [0, l]$. 则对于给定在 $\bar\omega$ 上的任何网格函数 $v(x)$，成立不等式

$$\|v_{\bar x}\|_0^2 + \mu \sum_{\bar\omega \cap [a, b]} v^2\hbar \geqslant M_5\|v\|_0^2, \tag{19}$$

其中 $M_5 = \dfrac{2m\mu}{(2 + lm\mu)l}$，而 $\mu = \text{const} > 0$.

证明. 当 $x_i \leqslant x_k$ 时满足关系式

$$\begin{aligned} v_i^2 &= \left(v_k - \sum_{j=i+1}^{k} v_{\bar x, j} h_j\right)^2 \\ &\leqslant (1 + \varepsilon)v_k^2 + (1 + 1/\varepsilon)\left(\sum_{j=i+1}^{k} v_{\bar x, j} h_j\right)^2 \\ &\leqslant (1 + \varepsilon)v_k^2 + (1 + 1/\varepsilon) \\ &\quad \times |x_i - x_k| \|v_{\bar x}\|_0^2. \end{aligned}$$

容易验证上述不等式当 $x_i \geqslant x_k$ 时仍然成立. 因此将它乘上 $\hbar_i$ 然后按 i 由 0 至 N 求和:

$$\begin{aligned} \|v\|_0^2 &\leqslant l(1 + \varepsilon)v_k^2 + (1 + 1/\varepsilon)\|v_{\bar x}\|_0^2(|x_k - x_i|, 1) \\ &\leqslant l(1 + \varepsilon)v_k^2 + (1 + 1/\varepsilon)\frac{l^2}{2}\|v_{\bar x}\|_0^2. \end{aligned}$$

再将所得不等式乘以 $\hbar_k$ 然后按 $x_k \in \bar\omega \cap [a, b]$ 求和. 我们得到

$$\sum_{\varpi\cap[a,b]} \hbar\|v\|_0^2 \leqslant l(1+\varepsilon)\sum_{\varpi\cap[a,b]} v^2(x)\hbar$$

$$+(1+1/\varepsilon)\frac{l^2}{2}\sum_{\varpi\cap[a,b]} \hbar\|v_{\bar{x}}\|_0^2.$$

利用条件(18)并令 $\varepsilon=\mu lm/2$，就得到(19)．引理得证．

引理 5. 对于给定在以 h 为步长的均匀网格 ϖ 上且在 $x=0$ 与 $x=l$ 上等于零的任何网格函数 $v(x)$，成立不等式

$$\|v_{\bar{x}x}\|_0^2 \geqslant M_6\|v\|_0^2,\ 其中\ M_6=\left[\frac{2\sin(\pi h/(2l))}{h}\right]^4. \qquad (20)$$

证明．根据§4 的不等式(9)，对任何 $\varepsilon>0$ 成立估计式

$$\|v_{\bar{x}x}\|_0^2 \geqslant \frac{1}{\varepsilon}\|v_{\bar{x}}\|_0^2-\frac{1}{4\varepsilon^2}\|v\|_0^2,$$

而根据引理 1，

$$\|v_{\bar{x}}\|_0^2 \geqslant M_1\|v\|_0^2,\quad 其中\ M_1=\left[\frac{2\sin(\pi h/(2l))}{h}\right]^2.$$

现在用第二个不等式来估计第一个不等式中的 $\|v_{\bar{x}}\|_0^2$，我们有

$$\|v_{\bar{x}x}\|_0^2 \geqslant \left(\frac{M_1}{\varepsilon}-\frac{1}{4\varepsilon^2}\right)\|v\|_0^2.$$

选取 ε 使得 $\|v\|_0^2$ 的系数为最大：$\varepsilon=1/(2M_1)$，将 ε 的这个值代入最后这个不等式就推出(20)．引理得证．

引理 6. 对于给定在以 h 为步长的均匀网格 ϖ 上且在 $x=0$ 与 $x=h$ 上等于零的任何网格函数 $v(x)$，成立不等式

$$\|v_{\bar{x}x}\|_0^2 \geqslant \frac{12}{l^4}\|v\|_0^2.$$

证明．注意到 $v(0)=0$，写出公式

$$v_i=\sum_{j=1}^{i} hv_{\bar{x},j}=\sum_{j=1}^{i} hx_{\bar{x},j}v_{\bar{x},j},$$

利用§1 中的公式(11)(令此式中的 $m=0$，$n=i$，$a\equiv 1$，$u\equiv v$，$v\equiv x$) 对它进行变换：

$$v_i = x_i v_{\bar{x},i} - \sum_{j=1}^{i-1} x_j v_{\bar{x}x,j} h.$$

由于 $v_{\bar{x}}(h) = 0$，我们求得

$$v_{\bar{x},i} = \sum_{j=1}^{i-1} v_{\bar{x}x,j} h.$$

把它代入前一个关系式，就有

$$v_i = \sum_{j=1}^{i-1} (x_i - x_j) v_{\bar{x}x,j} h.$$

由此求得

$$\|v\|_0^2 = \sum_{i=2}^{N-1} h \left\{ \sum_{j=1}^{i-1} (x_i - x_j) v_{\bar{x}x,j} h \right\}^2 + \frac{h}{2} \left\{ \sum_{j=1}^{N-1} h (x_N - x_j) v_{\bar{x}x,j} \right\}^2.$$

我们来估计上式右端中的和式. 利用 §1 中的哥西不等式(15)，我们求得对任何 $i = 2, 3, \cdots, N-1$ 成立不等式

$$\left\{ \sum_{j=1}^{i-1} (x_i - x_j) v_{\bar{x}x,j} h \right\}^2 \leqslant \sum_{j=1}^{i-1} (x_i - x_j)^2 h \|v_{\bar{x}x}\|_0^2.$$

利用这个估计式，从最后的恒等式可得不等式

$$\|v\|_0^2 \leqslant M \|v_{\bar{x}x}\|_0^2,$$

其中

$$M = \sum_{i=1}^{N-1} h \left\{ \sum_{j=1}^{i-1} h (x_i - x_j)^2 + \frac{h}{2} (x_N - x_i)^2 \right\}.$$

计算表明

$$M = \frac{h^4}{12} N(N-1)(N^2 - N + 1) < \frac{l^4}{12},$$

由此推出引理的结论.

2. 两个自变量的网格函数. 这里我们将研究给定在矩形网格 $\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2$ 上的网格函数,网格 $\bar{\omega}$ 位于矩形

$$\bar{G} = \{x = (x_1, x_2) | 0 \leqslant x_\alpha \leqslant l_2, \alpha = 1, 2\}$$

中,我们将使用 § 4 第二段中引入的记号.

引理 7 (弗利得李克斯不等式). 对于给定在任意的非均匀矩形网格 $\bar{\omega}$ 上且在边界 γ 上等于零的任意函数 $v(x)$,成立不等式

$$\|\nabla v\|_0^2 \geqslant (8/l_1^2 + 8/l_2^2)\|v\|_0^2. \tag{21}$$

证明. 对于函数 $v(x) = v(x_1, x_2)$,当固定 x_2 时,根据不等式(5)成立关系式

$$\sum_{x_1 \in \omega_1^+} (v_{\bar{x}}(x_1, x_2))h_1(x_1)$$

$$\geqslant \frac{8}{l_1} \sum_{x_1 \in \bar{\omega}_1} v^2(x_1, x_2)\hbar_1(x_1).$$

将这个不等式乘上 $h_2(x_2)$ 然后按 $x_2 \in \bar{\omega}_2$ 求和,得

$$\|v_{\bar{x}_1}\|_0^2 \geqslant (8/l_1^2)\|v\|_0^2.$$

类似地求得

$$\|v_{\bar{x}_2}\|_0^2 \geqslant (8/l_2^2)\|v\|_0^2.$$

将最后两个关系式相加就得不等式(21). 引理得证.

引理 8 (庞加莱不等式). 对于给定在任意的非均匀矩形网格 $\bar{\omega}$ 上的任何网格函数 $v(x)$,成立不等式

$$\|\nabla v\|_0^2 \geqslant \frac{4}{l_1^2 + l_2^2} \|v\|_0^2 - \frac{4}{l_1 l_2 (l_1^2 + l_2^2)} (v, 1)_{\bar{\omega}}^2. \tag{22}$$

证明. 设 $x_i = (x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_2)})$ 与 $x_j = (x_1^{(j_1)}, x_2^{(j_2)})$ 是网格

$\bar{\omega}$ 的任意二节点．对于任何函数 $v(x)$ 成立恒等式[1]

$$[v_i - v_j]^2 = \left[\operatorname{sign}(i_1 - j_1) \sum_{k_1=m_1+1}^{n_1} h_1 v_{\bar{x}_1, k_1, i_2} \right.$$

$$\left. + \operatorname{sign}(i_2 - j_2) \sum_{k_2=m_2+1}^{n_2} h_2 v_{\bar{x}_2, j_1, k_2} \right],$$

其中

$$m_\alpha = \min\{i_\alpha, j_\alpha\},\ n_\alpha = \max\{i_\alpha, j_\alpha\},\ \alpha = 1, 2.$$

由此根据 § 1 中的 ε-不等式(16)与哥西不等式(15)求得

$$[v(x) - v(y)]^2 \leqslant (1+\varepsilon)|x_1 - y_1| \sum_{x_1 \in \omega_1^+} h_1 v_{\bar{x}_1}^2(x_1, x_2)$$

$$+ (1 + 1/\varepsilon)|x_2 - y_2| \sum_{x_2 \in \omega_2^+} h_2 v_{\bar{x}_2}^2(y_1, x_2). \qquad (23)$$

将此不等式乘上 $\hbar_1(x_1)\hbar_2(x_2)\hbar_1(y_1)\hbar_2(y_2)$ 然后按 $x \in \bar{\omega}$ 及 $y \in \bar{\omega}$ 求和．由于

$$\sum_{x_\alpha \in \bar{\omega}_\alpha} |y_\alpha - x_\alpha| \hbar_\alpha \leqslant l_\alpha^2/2, \qquad (24)$$

则

$$2l_1l_2\|v\|_0^2 - 2(v, 1)_{\bar{\omega}}^2 \leqslant (1+\varepsilon)\frac{l_1^3 l_2}{2}\|v_{\bar{x}_1}\|_0^2$$

$$+ (1 + 1/\varepsilon)\frac{l_1 l_2^3}{2}\|v_{\bar{x}_2}\|_0^2.$$

现在取 $\varepsilon = (l_2/l_1)^2$ 就得到(22)．引理得证．

引理 9. 设 $\tilde{\omega} \subset \bar{\omega}$ 是网格 $\bar{\omega}$ 的节点的某个集合，并且

$$\sum_{\tilde{\omega}} \hbar_1\hbar_2 \geqslant m. \qquad (25)$$

---

1) 对连续变量函数是显然的关系式

$$[v(x) - v(y)]^2 = \left[\int_{y_1}^{x_1} \frac{\partial v(\xi_1, x_2)}{\partial \xi_1} d\xi_1 + \int_{y_2}^{x_2} \frac{\partial v(y_1, \xi_2)}{\partial \xi_2} d\xi_2\right]^2$$

在网格上就成为这种形式．

则对给定在 $\bar{\omega}$ 上的任何函数 $v(x)$，成立不等式

$$\|\nabla v\|_0^2+\mu\sum_{\bar{\omega}} v^2\hbar_1\hbar_2 \geqslant M_7\|v\|_0^2, \tag{26}$$

其中 $\mu=\text{const}>0$ 是任意的，而

$$M_7=\frac{2m\mu}{l_1l_2[2+\mu(l_1^2+l_2^2)]}.$$

证明．设 $x=(x_1,x_2)$ 与 $y=(y_1,y_2)$ 是网格 $\bar{\omega}$ 的两个任意节点，对 $v(x)$ 成立不等式

$$[v(x)-v(y)]^2\geqslant(1-\varepsilon_1)v^2(x)-(1/\varepsilon_1-1)v^2(y),$$

由此根据(23)求得

$$\begin{aligned}(1+\varepsilon_1)v^2(x)\leqslant&(1/\varepsilon_1-1)v^2(y)\\&+(1+\varepsilon_2)|x_1-y_1|\sum_{\omega_1^+}v_{\bar{x}_1}^2(x_1,x_2)h_1\\&+(1+1/\varepsilon_2)|x_2-y_2|\sum_{\omega_2^+}v_{\bar{x}_2}^2(y_1,x_2)h_2.\end{aligned}$$

将此不等式乘上 $\hbar_1\hbar_2$ 然后按 $x\in\bar{\omega}$ 求和．注意到估计式(24)，我们得到

$$\begin{aligned}(1-\varepsilon_1)\|v\|_0^2\leqslant& l_1l_2(1/\varepsilon_1-1)v^2(y)+(1+\varepsilon_2)\frac{l_1^2}{2}\|v_{\bar{x}_1}\|_0^2\\&+(1+1/\varepsilon_1)\frac{l_1l_2^2}{2}\sum_{\omega_2^+}v_{\bar{x}_2}^2(y_1,x_2)h_2.\end{aligned} \tag{27}$$

将此不等式乘上 $\hbar_1\hbar_2$ 然后按 $y\in\bar{\omega}$ 求和．经某些估计后求出

$$\begin{aligned}(1-\varepsilon_1)\sum_{\bar{\omega}}\hbar_1\hbar_2\|v\|_0^2\leqslant&(1/\varepsilon_1-1)l_1l_2\sum_{\bar{\omega}}v^2\hbar_1\hbar_2\\&+(1+\varepsilon_2)\frac{l_1^3l_2}{2}\|v_{\bar{x}_1}\|_0^2+(1+1/\varepsilon_2)\\&\times\frac{l_1l_2^3}{2}\|v_{\bar{x}_2}\|_0^2.\end{aligned}$$

令 $\varepsilon_2=(l_2/l_1)^2$，则有估计

$$(1-\varepsilon_1)\sum_{\tilde{\omega}} \hbar_1\hbar_2\|v\|_0^2 \leqslant (1/\varepsilon_1 - 1)l_1l_2\sum_{\tilde{\omega}} v^2\hbar_1\hbar_2$$
$$+\frac{l_1l_2(l_1^2+l_2^2)}{2}\|\nabla v\|_0^2.$$

现在根据条件 $(1/\varepsilon_1 - 1) = \mu(l_1^2 + l_2^2)/2$ 选择 ε_1 并考虑到条件(25)，我们得到估计(26)．引理得证．

引理 10. 设 $\tilde{\gamma}\subset\gamma$ 是边界节点的某个集合，而非均匀网格 ϖ 使得

$$\sum_{\tilde{\gamma}} \tau(x) \geqslant m, \tag{28}$$

其中 $\tau(x)$ 由 §4 的关系式(22)决定．则对于给定在 ϖ 上的任何函数 $v(x)$，成立不等式

$$\|\nabla v\|_0^2 + \mu\sum_{\tilde{\gamma}} v^2\tau \geqslant M_8\|v\|_0^2, \tag{29}$$

其中

$$M_8 = \frac{m\mu}{l_1l_2 + \mu(l_1^2+l_2^2)(l_1+l_2)},$$

而 μ 是任意的正常数，特别，若当 $x\in\tilde{\gamma}$ 时 $v(x)=0$，则对函数 $v(x)$ 成立不等式

$$\|\nabla v\|_0^2 \geqslant \frac{m}{(l_1+l_2)(l_1^2+l_2^2)}\|v\|_0^2. \tag{30}$$

证明．对函数 $v(x)$ 成立不等式(27)．除不等式(27)外，对 $v(x)$ 还成立(可类似地证明)不等式

$$\begin{aligned}(1-\varepsilon_1)\|v\|_0^2 &\leqslant l_1l_2(1/\varepsilon_1 - 1)v^2(y)\\ &+ (1+\varepsilon_2)\frac{l_1^2l_2}{2}\sum_{\omega_1^+} v_{\bar{x}_1}^2(x_1, y_2)\\ &+ (1+1/\varepsilon_2)\frac{l_2^2}{2}\|v_{\bar{x}_2}\|_0^2.\end{aligned} \tag{31}$$

设 $\tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}^{(1)}\cup\tilde{\gamma}^{(2)}$，其中 $\tilde{\gamma}^{(\alpha)}$ 是 γ 中位于直线 $x_\alpha = 0$ 或 $x_\alpha = l_\alpha$ 上的节点的集合，把(27)乘以 $\hbar_1(y_1)$ 然后将它按 $\tilde{\gamma}^{(2)}$

求和，得不等式

$$(1-\varepsilon_1)\sum_{y_1\in\tilde{\gamma}^{(2)}}\hbar_1(y_1)\|v\|_0^2\leqslant l_1l_2(1/\varepsilon_1-1)$$

$$\times\sum_{y_1\in\tilde{\gamma}^{(2)}}v^2(y)\hbar_1+(1+\varepsilon_2)l_1^3\|v_{\bar{x}_1}\|_0^2$$

$$+(1+1/\varepsilon_2)l_1l_2^2\|v_{\bar{x}_2}\|_0^2.$$

将关系式(31)两端乘上 $\hbar_2(y_2)$，再按 $\tilde{\gamma}^{(1)}$ 求和就得到不等式

$$(1-\varepsilon_1)\sum_{y_2\in\tilde{\gamma}^{(1)}}\hbar_2(y_2)\|v\|_0^2\leqslant l_1l_2(1/\varepsilon_1-1)$$

$$\times\sum_{y_2\in\tilde{\gamma}^{(1)}}\hbar_2(y_2)v^2(y)+(1+\varepsilon_2)l_1^2l_2\|v_{\bar{x}_1}\|_0^2$$

$$+(1/\varepsilon_2+1)l_2^3\|v_{\bar{x}_2}\|_0^2.$$

将最后这两个不等式相加，求得

$$(1-\varepsilon_1)\sum_{\tilde{\gamma}}\tau\|v\|_0^2\leqslant l_1l_2(1/\varepsilon_1-1)$$

$$\times\sum_{\tilde{\gamma}}v^2(x)\tau+(1+\varepsilon_2)l_1^2(l_1+l_2)\|v_{\bar{x}_1}\|_0^2$$

$$+(1+1/\varepsilon_2)l_2^2(l_1+l_2)\|v_{\bar{x}_2}\|_0^2.$$

现在令 $\varepsilon_2=(l_2/l_1)^2$，我们得到

$$(1-\varepsilon_1)\sum_{\tilde{\gamma}}\tau\|v\|_0^2\leqslant l_1l_2(1/\varepsilon_1-1)$$

$$\times\sum_{\tilde{\gamma}}v^2(x)\tau(x)+(l_1^2+l_2^2)(l_1+l_2)\|\nabla v\|_0^2.\qquad(32)$$

根据条件

$$l_1l_2(1/\varepsilon_1-1)=\mu(l_1+l_2)(l_1^2+l_2^2)$$

选取 ε_1 且注意到条件(28)，就得到估计式(29)。

现设当 $x\in\tilde{\gamma}$ 时 $v(x)=0$. 那么不等式(32)右端第一项消失. 由于 ε_1 是任意的非负数，则令 $\varepsilon_1=0$ 并注意到(28)，就得到(30)。引理得证.

第六章 先验估计

在第四章对于相当广泛一类数学物理问题曾给出了构造差分逼近的例子．在构造出差分格式并研究了它的逼近误差后，就产生一个关于网格问题的解趋向于原问题的解的收敛速度问题．前已指出，差分格式收敛速度的估计可以由这一格式的先验估计得到．本章便给出在第四章中所构造的某些差分格式的先验估计．所导出的先验估计主要是带说明性质的，并且远没有包括甚至在第四章中所考虑过的全部问题．然而，这里所研究的问题在某些方面是典型的，也就是，对这些问题得出先验估计所用的方法可以用来对更广泛一类的问题得到类似的估计．

在这一章中讲两种先验估计方法：能量不等式法和格林函数法．在实际中广泛应用的第三种先验估计方法是以最大值原理为基础的，我们在第三章已经介绍过．用能量不等式法对二阶及四阶方程的一维差分模拟进行先验估计的例子在第五章 § 2 中讲过．

§ 1. 能量不等式方法

这一节叙述得出差分问题先验估计的能量不等式方法．假定我们所研究的问题给定在均匀的矩形网格 $\bar{\omega}=\bar{\omega}_1\times\bar{\omega}_2$ 上．考虑含有混合导数的二阶方程第一边值问题的差分逼近格式，以及泊松方程和含有混合导数(常系数)的具有四阶逼近度的差分格式，还考虑没有混合导数的二阶方程第二和第

三边值问题的差分逼近格式.

1. 引言. 我们引进网格函数的两种新范数，它们在本节中得出先验估计时要用到

$$\|\varphi\|_{-1}=\sup_{v|_\gamma=0}\frac{|(\varphi,v)_\omega|}{\|v\|_1},$$

$$\|\varphi\|_{-\overset{\circ}{1}}=\sup_{v\neq 0}\frac{|(\varphi,v)_{\bar\omega}|}{\|v\|_1}.$$

在这一节要用到的其他范数均在第五章 § 4 节中引进了.

现在建立一个辅助性结论.

引理 1. 对于给定在均匀网格 $\bar\omega=\bar\omega_1\times\bar\omega_2$ 上的任意网格函数 $v(x)$，成立不等式

$$\|v_{\bar x_\alpha}\|_0^2\leqslant\frac{4}{h_\alpha^2}\|v\|_0^2,\qquad \alpha=1,2.$$

证明. 我们给出例如 $\alpha=1$ 时的证明. 按定义

$$\|v_{\bar x_1}\|_0^2=(v_{\bar x_1},v_{\bar x_1})_{\omega_1^+\times\bar\omega_2}=\frac{1}{h_1^2}(v-v^{(-1_1)},$$

$$v-v^{(-1_1)})_{\omega_1^+\times\bar\omega_2}.$$

逐项相乘并应用哥西不等式，得

$$\|v_{\bar x_1}\|_0^2\leqslant\frac{2}{h_1^2}(v^2,1)_{\omega_1^+\times\bar\omega_2}+\frac{2}{h_1^2}(v^2,1)_{{}^+\omega_1\times\bar\omega_2}$$

$$=\frac{4}{h_1^2}\|v\|_0^2.$$

2. 含有混合导数的二阶自共轭方程的狄利克雷问题. 考虑下面的问题：在矩形 $D=\{x=(x_1,x_2)\,|\,0<x_\alpha<l_\alpha,\ \alpha=1,2\}$ 上求解方程

$$Lu=\sum_{\alpha,\beta=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_{\alpha\beta}(x)\frac{\partial u}{\partial x_\beta}\right)-q(x)u=-f(x),\ x\in D,\tag{1}$$

在 D 的边界 Γ 上满足条件

$$u(x) = g(x), \qquad x \in \Gamma. \tag{2}$$

假设对所有 $x \in \overline{D} = D \cup \Gamma$，矩阵 $\{k_{\alpha\beta}\}$ 对称，正定并且它的元素是有界的，即对所有 $x \in \overline{D}$

$$c_1(\xi_1^2 + \xi_2^2) \leqslant \sum_{\alpha,\beta=1}^{2} k_{\alpha\beta}(x)\xi_\alpha\xi_\beta \leqslant c_2(\xi_1^2 + \xi_2^2), \tag{3}$$

$$c_1 = \text{const} > 0, \ c_2 = \text{const} > 0.$$

此外，还假定

$$q(x) \geqslant 0, \ x \in D. \tag{4}$$

在 $\overline{D}$ 中我们引入均匀的矩形网格 $\bar{\omega}$. 在第四章中对算子 L 已经建立了差分逼近，我们就用它来构造问题(1)，(2)的差分格式，即取

$$\Lambda y = -\varphi(x), \ x \in \omega, \ y = g(x), \ x \in \gamma, \tag{5}$$

其中

$$\Lambda y = \frac{1}{2}(\Lambda^- + \Lambda^+)y - dy,$$

$$\Lambda^- y = \sum_{\alpha,\beta=1}^{2} (k_{\alpha\beta}(x) y_{\bar{x}_\beta})_{x_\alpha},$$

$$\Lambda^+ y = \sum_{\alpha,\beta=1}^{2} (k_{\alpha\beta}(x) y_{x_\beta})_{\bar{x}_\alpha},$$

$$\varphi(x) = f(x), \ d(x) = q(x), \ x \in \omega.$$

我们来研究问题(5).

定理 1. 问题 (5) 的解存在且唯一. 对具有齐次边界条件 ($g(x) \equiv 0$) 的问题(5)的解成立先验估计

$$\|y\|_1 \leqslant \frac{1}{c_1}\left[1 + \frac{l_1^2 l_2^2}{8(l_1^2 + l_2^2)}\right]\|\varphi\|_{-1}.$$

证明. 设 $v(x)$ 是给定在 $\bar{\omega}$ 上的网格函数，且当 $x \in \gamma$ 时 $v(x) = 0$. 则利用第五章 §1 的分部求和公式(9)得到

$$(\Lambda^- v,\ v)_\omega = \sum_{\alpha,\beta=1}^{2} ((k_{\alpha\beta}(x) v_{\bar{x}_\beta})_{x_\alpha},\ v)_\omega$$

$$= -\sum_{\alpha,\beta=1}^{2} (k_{\alpha\beta}(x) v_{\bar{x}_\beta},\ v_{\bar{x}_\alpha})_{\omega_1\times\omega_2}.$$

由条件 (3) 推得

$$c_1 \|\nabla v\|_0^2 \leqslant -(\Lambda^- v,\ v)_\omega.$$

同样地可证明不等式

$$c_1 \|\nabla v\|_0^2 \leqslant -(\Lambda^+ v,\ v)_\omega.$$

联合这些不等式并考虑到条件(4)得到

$$c_1 \|\nabla v\|_0^2 \leqslant -(\Lambda v,\ v)_\omega. \tag{6}$$

从(6)并根据第五章 §5 引理(7)推得

$$\|v\|_1^2 \leqslant -\frac{1}{c_1}\left[1 + \frac{l_1^2 l_2^2}{8(l_1^2 + l_2^2)}\right](\Lambda v,\ v)_\omega. \tag{7}$$

从这里推得，如果对 $x \in \omega$ 有 $\Lambda v = 0$，则对 $x \in \omega$ 有 $v = 0$。这样，我们证明了，齐次问题(5)仅有平凡解 $v(x) = 0$，因而，对于任意的 φ 和 g 非齐次问题 (5) 的解存在并且这样的解是唯一的.

现在来得出问题(5)在条件 $g(x) = 0,\ x \in \gamma$ 时的解的先验估计. 为此，在(7)中置 $v = y$ 并且考虑到 $\Lambda y = -\varphi$，将有

$$\|y\|_1^2 \leqslant \frac{1}{c_1}\left[1 + \frac{l_1^2 l_2^2}{8(l_1^2 + l_2^2)}\right](\varphi,\ y)_\omega. \tag{8}$$

因为

$$|(\varphi,\ y)_\omega| \leqslant \|\varphi\|_{-1}\|y\|_1,$$

则从(8)推得所要求的先验估计. 定理得证.

3. 高阶逼近的差分格式. 考虑矩形D上泊松方程的狄利克雷问题

$$\Delta u = -f(x),\ x \in D;\ u = g(x),\ x \in \Gamma. \tag{9}$$

在第三章中对方程(9)在均匀的矩形网格ω上曾经建立了差分逼近，当方程(9)有光滑解时，它的误差为$O(|h|^4)$. 应用这一逼近式，我们来构造问题(9)的差分格式如下：

$$\Lambda' y = y_{\bar{x}_1 x_1} + y_{\bar{x}_2 x_2} + \frac{h_1^2 + h_2^2}{12} y_{\bar{x}_1 x_1 \bar{x}_2 x_2} = -\varphi(x),$$

$$x \in \omega,\ y(x) = g(x),\ x \in \gamma, \qquad (10)$$

其中

$$\varphi = f + \frac{h_1^2}{12}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{h_2^2}{12}\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}.$$

在第三章§4中曾经证明，问题(10)在条件

$$1/\sqrt{5} \leqslant h_1/h_2 \leqslant \sqrt{5}$$

之下的唯一可解性并且得到按范数C的先验估计(21). 这里我们证明，不对网格$\bar{\omega}$加以任何限制时问题(10)的可解性.

定理 2. 在任意的均匀网格$\bar{\omega}$上问题(10)的解存在. 这个解也是唯一的，而且当$g(x) = 0$时成立下面先验估计

$$\|y\|_1 \leqslant \frac{3}{2}\left(1 + \frac{l_1^2 l_2^2}{8(l_1^2 + l_2^2)}\right)\|\varphi\|_{-1}, \qquad (11)$$

$$\|y\|_{2,0} \leqslant \frac{3}{2}\|\varphi\|_0, \qquad (12)$$

$$\|y\|_c \leqslant M\|\varphi\|_0,\ M = \text{const} > 0. \qquad (13)$$

证明 设$v(x)$是给定在$\bar{\omega}$上的网格函数，并且在边界上为零：$v(x) = 0$，当$x \in \gamma$.

这时

$$(\Lambda' v, v)_\omega = (v_{\bar{x}_1 x_1}, v)_\omega + (v_{\bar{x}_2 x_2}, v)_\omega + \frac{h_1^2 + h_2^2}{12}$$

$$\times (v_{\bar{x}_1 x_1 \bar{x}_2 x_2}, v)_\omega = -(v_{\bar{x}_1}, v_{\bar{x}_1})_{\omega_1^+ \times \omega_2}$$

$$-(v_{\bar{x}_2}, v_{\bar{x}_2})_{\omega_1 \times \omega_2^+} + \frac{h_1^2 + h_2^2}{12}(v_{\bar{x}_1 \bar{x}_2}, v_{\bar{x}_1 \bar{x}_2})_{\omega_1^+ \times \omega_2^+}$$

$$= -\|\nabla v\|_0^2 + \frac{h_1^2 + h_2^2}{12}\|v_{\bar{x}_1 \bar{x}_2}\|_0^2.$$

根据引理 1，

$$\|v_{x_1x_2}\|_0^2 \leqslant \frac{4}{h_1^2}\|v_{\bar{x}_2}\|_0^2, \quad \|v_{\bar{x}_1\bar{x}_2}\|_0^2 \leqslant \frac{4}{h_2^2}\|v_{\bar{x}_1}\|_0^2,$$

因而

$$(\Lambda' v, v)_\omega \leqslant -\frac{2}{3}\|\nabla v\|_0^2.$$

根据第五章 § 5 中的引理 7 推得

$$\|v\|_1^2 \leqslant -\frac{3}{2}\left(1 + \frac{l_1^2 l_2^2}{8(l_1^2 + l_2^2)}\right)(\Lambda' v, v)_\omega. \tag{14}$$

因而，如果当 $x \in \omega$ 时有 $\Lambda' v = 0$，则当 $x \in \omega$时也有$v(x) \equiv 0$. 从而推得对任意的 φ 和 g 问题(10)有唯一解. 很容易从(14)推出先验估计(11).

现在考虑关系式

$$\begin{aligned}
(\Lambda' v, v_{\bar{x}_1x_1} + v_{\bar{x}_2x_2})_\omega &= (v_{\bar{x}_1x_1} + v_{\bar{x}_2x_2}, v_{\bar{x}_1x_1} + v_{\bar{x}_2x_2})_\omega \\
&\quad + \frac{h_1^2 + h_2^2}{12}\{(v_{\bar{x}_1x_1\bar{x}_2x_2}, v_{\bar{x}_1x_1})_\omega + (v_{\bar{x}_1x_1\bar{x}_2x_2}, v_{\bar{x}_2x_2})_\omega\} \\
&= \|v_{\bar{x}_1x_1}\|_0^2 + \|v_{\bar{x}_2x_2}\|_0^2 + 2\|v_{\bar{x}_1\bar{x}_2}\|_0^2 \\
&\quad - \frac{h_1^2 + h_2^2}{12}(\|v_{\bar{x}_1x_1\bar{x}_2}\|_0^2 + \|v_{\bar{x}_1\bar{x}_2x}\|_0^2).
\end{aligned} \tag{15}$$

根据引理 1 成立关系式

$$\begin{aligned}
\|v_{\bar{x}_1x_1\bar{x}_2}\|_0^2 + \|v_{\bar{x}_1\bar{x}_2x_2}\|_0^2 &\leqslant \frac{4}{h_1^2}(\|v_{\bar{x}_1\bar{x}_2}\|_0^2 + \|v_{\bar{x}_2x_2}\|_0^2), \\
\|v_{\bar{x}_1x_1\bar{x}_2}\|_0^2 + \|v_{\bar{x}_1\bar{x}_2x_2}\|_0^2 &\leqslant \frac{4}{h_2^2}(\|v_{\bar{x}_1x_1}\|_0^2 + \|v_{\bar{x}_1\bar{x}_2}\|_0^2).
\end{aligned} \tag{16}$$

将(16)代入(15)得到

$$(\Lambda' v, v_{\bar{x}_1x_1} + v_{\bar{x}_2x_2})_\omega \geqslant \frac{2}{3}(\|v_{\bar{x}_1x_1}\|_0^2 + \|v_{\bar{x}_2x_2}\|_0^2 + 2\|v_{\bar{x}_1\bar{x}_2}\|_0^2).$$

如果 $v = y$，则由(10)有

$$\|y_{\bar{x}_1x_1}\|_0^2 + \|y_{\bar{x}_2x_2}\|_0^2 + 2\|y_{\bar{x}_1\bar{x}_2}\|_0^2 \leqslant \frac{3}{2}|(\varphi, y_{\bar{x}_1x_1} + y_{\bar{x}_2x_2})_\omega|$$

$$\leqslant \frac{3}{2}\|\varphi\|_0\|y_{\bar{x}_1x_1} + y_{\bar{x}_2x_2}\|_0^2.$$

但是

$$\|y_{\bar{x}_1x_1} + y_{\bar{x}_2x_2}\|_0^2 = \|y_{\bar{x}_1x_1}\|_0^2 + \|y_{\bar{x}_2x_2}\|_0^2 + 2\|y_{\bar{x}_1\bar{x}_2}\|_0^2$$
$$= \|y\|_{2,0}^2,$$

因而

$$\|y\|_{2,0} \leqslant \frac{3}{2}\|\varphi\|_0.$$

根据第五章 § 4 中的定理 5，从 (12) 可推得 (13). 定理证毕.

现在考虑含有混合导数的常系数二阶方程的狄利克雷问题:

$$Lu = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + 2\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} = -f(x),\ x \in D,$$
$$|\alpha| < 1,\ u(x) = g(x),\ x \in \Gamma. \tag{17}$$

当 $|\alpha| < 1$ 时方程(17)是椭圆型的. 在第四章中对于方程(17)在步长为 h 的正方形网格上曾经建立了差分格式，在光滑解上它的逼近误差为 $O(|h|^4)$. 使用这个格式，我们提出逼近问题(17)的差分问题如下:

$$\Lambda' y = y_{\bar{x}_1x_1} + y_{\bar{x}_2x_2} + \alpha(y_{\bar{x}_1x_2} + y_{x_1\bar{x}_2})$$
$$+ h^2\frac{1 + 3\alpha + 2\alpha^2}{6}y_{\bar{x}_1x_1\bar{x}_2x_2} = -\varphi(x),$$
$$x \in \omega,\ y = g,\ x \in \gamma. \tag{18}$$

其中

$$\varphi = f(x) + \frac{h^2}{12}Lf.$$

我们研究问题(18).

定理 3. 问题 (18) 的解存在且唯一. 当 $g \equiv 0$ 时问题

(18)的解满足先验估计:

$$\|y\|_1 \leqslant \frac{3}{2(1-|\alpha|)}\left(1+\frac{l_1^2 l_2^2}{8(l_1^2+l_2^2)}\right)\|\varphi\|_{-1}, \tag{19}$$

$$\|y\|_{2,0} \leqslant \frac{3}{2(1-|\alpha|)}\|\varphi\|_0, \tag{20}$$

$$\|y\|_c \leqslant M\|\varphi\|_0,\ M = \text{const} > 0. \tag{21}$$

证明. 改写算子 Λ'. 首先注意到

$$h^2 y_{\bar{x}_1 x_1 \bar{x}_2 x_2} = y_{\bar{x}_1\bar{x}_2} + y_{x_1 x_2} - y_{x_1\bar{x}_2} - y_{\bar{x}_1 x_2}. \tag{22}$$

算子 Λ' 变换成使得 $\frac{h^2}{6} y_{\bar{x}_1 x_1 \bar{x}_2 x_2}$ 的系数为

$$(1-3|\alpha|+2\alpha^2). \tag{23}$$

考虑到公式(22),我们可写成

$$\begin{aligned}
\Lambda' y &= y_{\bar{x}_1 x_1} + y_{\bar{x}_2 x_2} + \alpha(y_{\bar{x}_1 x_2} + y_{x_1\bar{x}_2}) + \frac{\alpha+|\alpha|}{2} \\
&\times (y_{\bar{x}_1\bar{x}_2} + y_{x_1 x_2} - y_{\bar{x}_1 x_2} - y_{x_1\bar{x}_2}) + \frac{h^2}{6} \\
&\times (1-3|\alpha|+2\alpha^2) y_{\bar{x}_1 x_1 \bar{x}_2 x_2} = y_{\bar{x}_1 x_1} + y_{\bar{x}_2 x_2} \\
&+ \frac{\alpha-|\alpha|}{2}(y_{\bar{x}_1 x_2} + y_{x_1\bar{x}_2}) + \frac{\alpha+|\alpha|}{2} \\
&\times (y_{\bar{x}_1\bar{x}_2} + y_{x_1 x_2}) + \frac{h^2}{6}(1-3|\alpha|+2\alpha^2) \\
&\times y_{\bar{x}_1 x_1 \bar{x}_2 x_2} = \frac{1}{2}(1-\operatorname{sign}\alpha)\Lambda^- y \\
&+ \frac{1}{2}(1+\operatorname{sign}\alpha)\Lambda^+ y + \frac{h^2}{6} \\
&\times (1-3|\alpha|+2\alpha^2) y_{\bar{x}_1 x_1 \bar{x}_2 x_2},
\end{aligned} \tag{24}$$

其中

$$\Lambda^- y = y_{\bar{x}_1 x_1} + y_{\bar{x}_2 x_2} + \alpha(y_{\bar{x}_1 x_2} + y_{x_1\bar{x}_2}),$$
$$\Lambda^+ y = y_{\bar{x}_1 x_1} + y_{\bar{x}_2 x_2} + \alpha(y_{\bar{x}_1\bar{x}_2} + y_{x_1 x_2}).$$

设 $v(x)$ 是给定在 $\bar{\omega}$ 上的网格函数，且 $v(x)=0$，$x\in\gamma$. 根据条件 $|\alpha|<1$ 有

$$\begin{aligned}(\Lambda^- v,\ v)_\omega &= -(v_{\bar{x}_1},\ v_{\bar{x}_1})_{\omega_1^+\times\omega_2}-(v_{\bar{x}_2},\ v_{\bar{x}_2})_{\omega_1\times\omega_2^+}\\ &\quad-\alpha(v_{\bar{x}_1},\ v_{\bar{x}_2})_{\omega_1^+\times\omega_2^+}-\alpha(v_{\bar{x}_1},\ v_{\bar{x}_2})_{\omega_1^+\times\omega_2^+}\\ &\leqslant-(1-|\alpha|)\|\nabla v\|_0^2.\end{aligned}\tag{25}$$

类似地可以证明

$$(\Lambda^+ v,\ v)_\omega\leqslant-(1-|\alpha|)\|\nabla v\|_0^2.\tag{26}$$

根据引理 1

$$h^2(v_{\bar{x}_1x_1\bar{x}_2x_2},\ v)_\omega=h^2(v_{\bar{x}_1\bar{x}_2},\ v_{\bar{x}_1\bar{x}_2})_{\omega_1^+\times\omega_2^+}\leqslant2\|\nabla v\|_0^2.\tag{27}$$

注意，函数(23)当 $0.5\leqslant|\alpha|<1$ 时是非正的，当 $0\leqslant|\alpha|<0.5$时是正的. 因而，当 $0.5\leqslant|\alpha|<1$ 时从关系式(24)—(27)可得

$$-(\Lambda' v,\ v)_\omega\geqslant(1-|\alpha|)\|\nabla v\|_0^2.\tag{28}$$

而当 $0\leqslant|\alpha|<0.5$ 时

$$-(\Lambda' v,\ v)_\omega\geqslant\left(1-|\alpha|-\frac{1-3|\alpha|+2\alpha^2}{3}\right)\|\nabla v\|_0^2.\tag{29}$$

综合(28)，(29)，对所有 $|\alpha|<1$ 有

$$\frac{2}{3}(1-|\alpha|)\|\nabla v\|_0^2<-(\Lambda' v,\ v)_\omega.\tag{30}$$

根据第五章 § 5 中的引理 7 从不等式(30)求得

$$\|v\|_1^2\leqslant\frac{-3}{2}\left\{\left(1+\frac{l_1^2l_2^2}{8(l_1^2+l_2^2)}\right)\Big/_{(1-|\alpha|)}\right\}(\Lambda' v,\ v)_\omega.\tag{31}$$

如果对 $x\in\omega$，有 $\Lambda' v=0$，则从(31)推得 $v\equiv0$. 这样，我们证明了问题(18)的解存在且唯一. 从不等式(31)很容易推出先验估计(19).

现在证明先验估计(20)成立. 根据条件 $|\alpha|<1$ 我们得出

$$(v_{\bar{x}_1x_1}+v_{\bar{x}_2x_2}+2\alpha v_{\bar{x}_1x_2},\ v_{\bar{x}_1x_1})_\omega$$
$$=(v_{\bar{x}_1x_1}+2\alpha v_{\bar{x}_1x_2},\ v_{\bar{x}_1x_1})_\omega+\|v_{\bar{x}_1x_2}\|_0^2$$
$$\geqslant(1-|\alpha|)(\|v_{\bar{x}_1x_1}\|_0^2+\|v_{\bar{x}_1\bar{x}_2}\|_0^2). \qquad (32)$$

类似地

$$(v_{\bar{x}_1x_1}+v_{\bar{x}_2x_2}+2\alpha v_{\bar{x}_1x_2},\ v_{\bar{x}_2x_2})_\omega$$
$$\geqslant(1-|\alpha|)(\|v_{\bar{x}_2x_2}\|_0^2+\|v_{\bar{x}_1\bar{x}_2}\|_0^2). \qquad (33)$$

综合(32),(33),得

$$(v_{\bar{x}_1x_1}+v_{\bar{x}_2x_2}+2\alpha v_{\bar{x}_1x_2},\ v_{\bar{x}_1x_1}+v_{\bar{x}_2x_2})_\omega$$
$$\geqslant(1-|\alpha|)(\|v_{\bar{x}_1x_1}\|_0^2+\|v_{\bar{x}_2x_2}\|_0^2$$
$$+2\|v_{\bar{x}_1\bar{x}_2}\|_0^2). \qquad (34)$$

完全同样可证明不等式

$$(v_{\bar{x}_1x_1}+v_{\bar{x}_2x_2}+2\alpha v_{x_1\bar{x}_2},\ v_{\bar{x}_1x_1}+v_{\bar{x}_2x_2})_\omega$$
$$\geqslant(1-|\alpha|)(\|v_{\bar{x}_1x_1}\|_0^2+\|v_{\bar{x}_2x_2}\|_0^2$$
$$+2\|v_{\bar{x}_1\bar{x}_2}\|_0^2). \qquad (35)$$

将(34)与(35)相加并除以 2 就得

$$(\Lambda^-v,\ v_{\bar{x}_1x_1}+v_{\bar{x}_2x_2})_\omega$$
$$\geqslant(1-|\alpha|)(\|v_{\bar{x}_1x_1}\|_0^2+\|v_{\bar{x}_2x_2}\|_0^2$$
$$+2\|v_{\bar{x}_1\bar{x}_2}\|_0^2). \qquad (36)$$

完全类似地可得

$$(\Lambda^+v,\ v_{\bar{x}_1x_1}+v_{\bar{x}_2x_2})_\omega$$
$$\geqslant(1-|\alpha|)(\|v_{\bar{x}_1x_1}\|_0^2+\|v_{\bar{x}_2x_2}\|_0^2$$
$$+2\|v_{\bar{x}_1\bar{x}_2}\|_0^2). \qquad (37)$$

其次,根据引理 1

$$h^2(v_{\bar{x}_1x_1\bar{x}_2x_2},\ v_{\bar{x}_1x_1}+v_{\bar{x}_2x_2})_\omega=-h^2(\|v_{\bar{x}_1x_1\bar{x}_2}\|_0^2$$
$$+\|v_{\bar{x}_1\bar{x}_2x_2}\|_0^2)\geqslant-2(\|v_{\bar{x}_1x_1}\|_0^2+\|v_{\bar{x}_2x_2}\|_0^2$$
$$+2\|v_{\bar{x}_1\bar{x}_2}\|_0^2). \qquad (38)$$

像证明不等式(30)那样,可得

$$\|v_{\bar{x}_1x_1}\|_0^2 + 2\|v_{\bar{x}_1\bar{x}_2}\|_0^2 + \|v_{\bar{x}_2x_2}\|_0^2$$
$$\leqslant \frac{3}{2}\,\frac{1}{1-|\alpha|}\,(\Lambda' v,\ v_{\bar{x}_1x_1} + v_{\bar{x}_2x_2})_{\omega}. \qquad (39)$$

在(39)中令 $v(x)=y(x)$，按通常的方式可得估计式(20)。由第五章 §4 中的定理 5，从估计式(20)推到估计式(21)。

3. 无混合导数的二阶自共轭方程在矩形上的第三边值问题. 我们考虑

$$Lu = \sum_{\alpha=1}^{2} L_\alpha u = -f(x), \qquad x\in D, \qquad (40)$$

$$\frac{\partial u}{\partial N} = \kappa(s) - g(s), \qquad s\in\Gamma, \qquad (41)$$

这里 $\partial/\partial N$ 是沿边界 Γ 的内余法线的导数算子，即

$$\frac{\partial u}{\partial N} = \begin{cases} k_\alpha(x)\dfrac{\partial u}{\partial x_\alpha}, & x_\alpha = 0 \\[2ex] -k_\alpha(x)\dfrac{\partial u}{\partial x_\alpha}, & x_\alpha = l_\alpha,\ \alpha=1,2, \end{cases}$$

其中 s 为边界 Γ 的弧长，是从坐标原点 $(0,0)$ 开始按反时针方向计算的，而

$$L_\alpha u = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right) - q_\alpha(x)u.$$

我们假定问题(40)，(41)的系数满足条件

$$k_\alpha(x) \geqslant c_1 > 0,\ q_\alpha(x)\geqslant 0,\ \kappa(s)\geqslant 0. \qquad (42)$$

令

$$\bar{\Lambda}_\alpha y = \begin{cases} \Lambda_\alpha y = (a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha})_{x_\alpha} - d_\alpha y, & x_\alpha\in\omega_\alpha, \\[1ex] \Lambda_\alpha^- y = \dfrac{2}{h_\alpha}\left[a_\alpha^{(+1\alpha)} y_{x_\alpha} - \left(\kappa_{-\alpha} + \dfrac{1}{2}h_\alpha d_\alpha\right)y\right], \\ \qquad x_\alpha = 0, \\[1ex] \Lambda_\alpha^+ y = \dfrac{2}{h_\alpha}\left[-a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha} - \left(\kappa_{+\alpha} + \dfrac{1}{2}h_\alpha d_\alpha\right)y\right], \\ \qquad x_\alpha = l_\alpha. \end{cases}$$

于是问题(40),(41)的差分逼近可以写为

$$\bar{\Lambda} y = -\Phi(x), \qquad x \in \bar{\omega}, \tag{43}$$

这里

$$\bar{\Lambda} = \bar{\Lambda}_1 + \bar{\Lambda}_2, \ \Phi(x) = \varphi(x) + \delta(\gamma) g(x),$$

而 $\delta(\gamma)$ 是边界上的 δ-函数的网格模拟,即

$$(v, \delta(\gamma))_{\bar{\omega}} = (v, 1)_{\gamma}.$$

定理 4 如果对给定在 $\bar{\omega}$ 上的任意函数 $v(x)$ 关于 $|h|$ 一致地满足关系式

$$-(\bar{\Lambda} v, v)_{\bar{\omega}} \geqslant c \|v\|_1^2, \ c = \text{const} > 0, \tag{44}$$

则问题(43)存在唯一解,并且有如下先验估计

$$\|y\|_1^2 \leqslant M(\|\varphi\|_{-1}^2 + \|g\|_0'^2), \ M = \text{const} > 0. \tag{45}$$

证明. 从(43)和(44)推得,如果当 $x \in \bar{\omega}$ 时 $\Phi(x) = 0$,则对 $x \in \bar{\omega}$,也有 $v(x) = 0$. 因而问题(43)的解存在且唯一.

将(43)与 y 作内积

$$-(\bar{\Lambda} y, y)_{\bar{\omega}} = (\Phi, y)_{\bar{\omega}} = (\varphi, y)_{\bar{\omega}} + (g, y)_{\gamma}. \tag{46}$$

根据泡数 $\|\cdot\|_{-1}$ 的定义以及第五章 § 1 中的 ε 不等式(16)得到

$$|(\varphi, y)_{\bar{\omega}}| \leqslant \|\varphi\|_{-1} \|y\|_1 \leqslant \varepsilon \|y\|_1^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \|\varphi\|_{-1}^2. \tag{47}$$

考虑到第五章 § 1 的哥西不等式(15)及其 ε 不等式(16):

$$|(g, y)_{\gamma}| \leqslant \varepsilon \|y\|_0'^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \|g\|_0'^2. \tag{48}$$

由第五章 § 4 中的定理,有估计式

$$\|y\|_0'^2 \leqslant M_2 \|y\|_1^2. \tag{49}$$

将估计式(47)—(49)代入(46),并注意到当 $\varepsilon = c/(2(1 + M_2))$ 时的不等式(44),我们得到(45),定理证毕.

定理 5. 如果

$$d(x) = \kappa(s) = 0 \tag{50}$$

且对给定在 $\bar{\omega}$ 上的任意函数 $v(x)$ 关于 $|h|$ 一致地成立关系式

$$-(\bar{\Lambda}v, v)_{\bar{\omega}} \geqslant c\|\nabla v\|_0^2, \quad c = \text{const} > 0, \tag{51}$$

则当条件

$$(\Phi, 1)_{\bar{\omega}} = (\varphi, 1)_{\bar{\omega}} + (g, 1)_{\gamma} = 0 \tag{52}$$

满足时,问题(43)的解存在. 如果

$$(y, 1)_{\bar{\omega}} = Q, \tag{53}$$

其中 Q 是一个固定常数,则解唯一. 对于(43)和(50)的解,有如下先验估计

$$\|y\|_1^2 \leqslant M\{\|\varphi\|_{-1}^2 + \|g\|_0'^2 + (y, 1)^2\}, \tag{54}$$

这里 $M = \text{const} > 0$.

证明. 从算子 $\bar{\Lambda}$ 的形式可知,它是自共轭的. 容易验证,当满足条件(50)时,零是这个算子的固有值,与它对应的固有函数是常数. 因而从(52)推得问题(43)解的存在性,而从(53)推得唯一性.

为得到先验估计,将(43)与 y 作内积,我们有

$$-(\bar{\Lambda}y, y)_{\bar{\omega}} = (\varphi, y)_{\bar{\omega}} + (g, y)_{\gamma}.$$

恒等式右端的估计同定理 4. 注意到(51),得

$$c\|\nabla y\|_0^2 \leqslant \varepsilon(1 + M_2)\|y\|_1^2 + \frac{1}{4\varepsilon}(\|\varphi\|_{-1}^2 + \|g\|_0'^2).$$

现在利用庞卡莱不等式(第五章 §5 引理 8)当 ε 充分小时得到(54). 定理证毕.

定理 4 的先验估计(45)是在关系式(44)成立的前提下建立的. 现在要说明,为使关系式(44)成立,对问题(40),(41)的系数需要加什么样条件.

定理 6(第一充分条件). 假设问题(40),(41)的系数满足条件(42),此外,设

$$q(x) \geqslant c_2 > 0, \qquad x \in \bar{D}_0, \tag{55}$$

其中

$$\overline{D}_0=\{x=(x_1,x_2)\mid l_{-\alpha}\leqslant x_\alpha\leqslant l_{+\alpha},\ \alpha=1,2\}\subset\overline{D}.$$

于是，若选取网格使得满足第五章 § 5 引理 9 中的条件，则对于给定在 ϖ 上的任意网格函数 $v(x)$ 满足不等式

$$-(\bar{\Lambda}v,\ v)_{\varpi}\geqslant c\|v\|_1^2,\quad c=\text{const}>0.$$

证明. 根据条件(55)，

$$(d,\ v^2)_{\varpi}\geqslant\sum_{\varpi\cap\overline{D}_0}dv^2\hbar_1\hbar_2\geqslant c_2\sum_{\varpi\cap\overline{D}_0}v^2\hbar_1\hbar_2.$$

按照网格的构造

$$-(\bar{\Lambda}v,\ v)_{\varpi}=\sum_{\omega_1^+}\sum_{\varpi_2}a_1v_{\bar{x}_1}^2h_1\hbar_2$$

$$+\sum_{\varpi_1}\sum_{\omega_2^+}a_2v_{\bar{x}_2}^2\hbar_1h_2+(d,\ v^2)_{\varpi}+(\kappa,\ v^2)_{\gamma}.\tag{56}$$

根据条件(42)，从第五章 § 5 引理 9 以及上面的不等式推得

$$-(\bar{\Lambda}v,\ v)_{\varpi}\geqslant c_1\|\nabla v\|_0^2+c_2\sum_{\varpi\cap\overline{D}_0}v^2\hbar_1\hbar_2\geqslant c\|v\|_1^2.$$

定理证毕.

定理 7（第二充分条件）. 假设问题(40)，(41)的系数满足条件(42)，此外，设

$$\kappa(s)\geqslant c_3>0,\qquad s\in\Gamma_0,\tag{57}$$

其中 $\Gamma_0\subseteq\Gamma$. 于是，若选取网格使得满足第五章 § 5 引理 10 中的条件，则对给定在 ϖ 上的任意网格函数 $v(x)$ 有

$$-(\bar{\Lambda}v,\ v)_{\varpi}\geqslant c\|v\|_1^2,\quad c=\text{const}>0.$$

证明. 根据条件(57)

$$(\kappa,\ v^2)_{\gamma}\geqslant\sum_{\gamma\cap\overline{\Gamma}_0}\kappa v^2\tau\geqslant c_3\sum_{\gamma\cap\overline{\Gamma}_0}v^2\tau.$$

由此从(56)以及第五章§5引理 9 并根据条件(42)推得

$$-(\bar{\Lambda}v,\ v)_{\varpi}\geqslant c_1\|\nabla v\|_0^2+c_3\sum_{\gamma\cap\overline{\Gamma}_0}v^2\tau\geqslant c\|v\|_1^2.$$

定理证毕.

引理 2. 对于给定在 ϖ 上的任意函数 $v(x)$，若满足条件(42)，则

$$-(\bar{\Lambda} v, v)_{\varpi} \geqslant c_1\|\nabla v\|_0^2.$$

证明从关系式(56)立即可得.

定理 8. 如果满足条件 (42) 和(55)或者(42)和(57)，则问题(43)的解在 w_2^1 范数意义下收敛于问题(40)，(41)的充分光滑的解，收敛速度为 $O(|h|^2)$，即

$$\|y-u\|_1 \leqslant M|h|^2.$$

由定理 4，6 和 7 以及关于逼近误差（问题（43））是 $O(|h|^2)$ 的结论立即可得证明.

现在考虑在满足条件(42)和(50)时的问题(40)，(41).前面已经指出，此时并非对任意右端 f 和 g 都有解. 为使解存在必须假定

$$\int_D f(x)dx + \int_\Gamma g(s)ds = 0. \tag{58}$$

这时解的唯一性条件是

$$\int_D u(x)dx = Q = \text{const}. \tag{59}$$

定理 9. 如果条件(42)和(50)满足，则右端为

$$\Phi = \varphi(x) + \delta(\gamma)g - \{(f, 1)_{\varpi} + (g, 1)_{\gamma}\}/\text{mes}\, D$$

的问题(43)，(52)，(53)的解在 w_2^1 范数意义下收敛于问题(40)，(41)，(58)，(59)的充分光滑解，收敛速度为 $O(|h|^2)$，即

$$\|y-u\|_1 \leqslant M|h|^2.$$

证明. 关于解的误差 $z=y-u$ 根据定理 5 有估计式

$$\|z\|_1^2 \leqslant M(\|\psi\|_{-1}^2 + \|\psi_\gamma\|_0^{\prime 2} + (z, 1)_{\varpi}^2),$$

其中 ψ 是方程的逼近误差，而 ψ_γ 是边界条件的逼近误差. 因为原问题的解假定是充分光滑的，所以当右端的扰动

$$(f, 1)_{\omega} + (g, 1)_{\gamma}$$

为 $O(|h|^2)$ 时，函数 ϕ 和 ϕ_γ 也将是 $O(|h|^2)$. 但这确是如此，因为 $(f, 1)_{\omega}$ 和 $(g, 1)_{\gamma}$ 均为梯形求积公式，它们的误差为 $O(|h|^2)$. 考虑到条件(58)，得到

$$(f, 1)_{\omega} + (g, 1)_{\gamma} = O(|h|^2).$$

剩下的是估计 $(z, 1)_{\omega}^{\hat{}}$. 由定义并根据条件(53)和(59)有

$$(z, 1)_{\omega} = (y, 1)_{\omega} - (u, 1)_{\omega} = \int_D u dx - (u, 1)_{\omega}$$
$$= O(|h|^2),$$

因为 $(u, 1)_{\omega}$ 是梯形求积公式. 定理证毕.

4. 矩形上的弹性理论方程组的第一边值问题. 现在转到讨论方程组的问题. 设 D 是前面定义的矩形而 Γ 为它的边界. 设在 D 中给定均匀的各向同性弹性体的平衡方程组

$$\begin{aligned}(\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \mu \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2}& \\ + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} + F_1 = 0&, \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \mu \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2}& \\ + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + F_2 = 0&.\end{aligned} \tag{60}$$

要求解这一方程组，而在边界 Γ 上满足第一类齐次边界条件

$$u_1|_\Gamma = u_2|_\Gamma = 0. \tag{61}$$

设 ω 是 $\overline{D} = D \cup \Gamma$ 中的均匀矩形网格，在第四章 §4 中在这样的网格上曾建立了方程组(60)的网格逼近，并且证明了它的误差是 $O(|h|^2)$. 这个网格方程组可以写为形式

$$((\lambda + 2\mu) y_{1\bar{x}_1})_{x_1} + (\mu y_{1\bar{x}_2})_{x_2}$$
$$+ \frac{1}{2} [(\lambda y_{2x_2})_{x_1} + (\lambda y_{2\bar{x}_2})_{\bar{x}_1} + (\mu y_{2x_1})_{x_2}$$

$$+ (\mu y_{2\bar{x}_1})_{\bar{x}_2}] + F_1 = 0$$

$$\frac{1}{2}[(\lambda y_{1x_1})_{x_2} + (\lambda y_{1\bar{x}_1})_{\bar{x}_2} + (\mu y_{1x_2})_{x_1} + (\mu y_{1\bar{x}_2})_{\bar{x}_1}]$$

$$+ (\mu y_{2\bar{x}_1})_{x_1} + ((\lambda + 2\mu) y_{2\bar{x}_2})_{x_2} + F_2$$

$$= 0, \qquad x \in \omega. \tag{62}$$

因为系数 λ 和 μ 是常数，所以事实上，例如，

$$(\lambda y_{2x_2})_{x_1} + (\mu y_{2x_1})_{x_2} = (\lambda + \mu) y_{2x_1x_2},$$

我们在(62)中所采用的这些项的写法对于往后的研究将是方便的．对方程组(62)附加以边界条件(61)的逼近式

$$y_1|_\gamma = y_2|_\gamma = 0, \tag{63}$$

我们得到网格问题(62)，(63)，它逼近问题(60)，(61)．

现在要建立问题(62)，(63)的解的先验估计．为此我们将方程(62)中的第一个乘以 $y_1(x)h_1h_2$，第二个乘以 $y_2(x)h_1h_2$，再将所得的关系式按网格 ω 求和并相加，利用第五章§1中的第一差分格林公式 (12) 以及同一节的分部求和公式 (8) 和 (9) 变换求和号下的表达式．这时，我们仅就差商外层标号所指示的那个变量对每一表达式进行变换．考虑到边界条件(63)，并将各项重新组合，得到

$$2W_h = (F_1, y)_\omega + (F_2, y_2)_\omega, \tag{64}$$

其中

$$W_h = \frac{1}{2}\Big\{2\mu(\|y_{1\bar{x}_1}\|_0^2 + \|y_{2\bar{x}_2}\|_0^2)$$

$$+ \frac{\lambda}{2}((y_{1\bar{x}_1} + y_{2x_2})^2, 1)_{\omega_1^+ \times {}^+\omega_2}$$

$$+ \frac{\lambda}{2}((y_{1x_1} + y_{2\bar{x}_2})^2, 1)_{{}^+\omega_1 \times \omega_2^+}$$

$$+ \frac{\mu}{2}((y_{1x_2} + y_{2\bar{x}_1})^2, 1)_{\omega_1^+ \times {}^+\omega_2}$$

$$+ \frac{\mu}{2}((y_{1\bar{x}_2} + y_{2x_1})^2, 1)_{{}^+\omega_1 \times \omega_2^+}\Big\} \tag{65}$$

是弹性变形能的网格模拟.

我们变换(65)式右端最后两个表达式. 一方面作乘方, 同时考虑到边界条件(63), 变换表达式 $(y_{\alpha x_\beta}, y_{\beta\bar{x}_\alpha})_\omega$, $\alpha \neq \beta$, $\alpha, \beta = 1, 2$, 首先对变量 x_α 利用第五章 § 1 的分部求和公式(8), 然后对变量 x_β 利用同节的公式(9), 得到

$$((y_{\alpha x_\beta} + y_{\beta\bar{x}_\alpha})^2, 1)_{\omega_\alpha^+ \times^+ \omega_\beta} = \|y_{1\bar{x}_2}\|_0^2 + \|y_{2\bar{x}_1}\|_0^2 + 2(y_{\alpha x_\alpha}, y_{\beta\bar{x}_\beta})_\omega.$$

将此式代入(65)并略去系数为 $\lambda/2$ 的项, 得

$$W_h \geqslant \frac{\mu}{2}\{2(\|y_{1\bar{x}_1}\|_0^2 + \|y_{2\bar{x}_2}\|_0^2) + \|y_{1\bar{x}_2}\|_0^2 + \|y_{2\bar{x}_1}\|_0^2 + (y_{1x_1}, y_{2\bar{x}_2})_\omega + (y_{1\bar{x}_1}, y_{2x_2})_\omega\}.$$

根据第五章 § 1 中的哥西不等式(15)和同节的 ε 不等式(16)有

$$|(y_{\alpha\bar{x}_\alpha}, y_{\beta x_\beta})_\omega| \leqslant \frac{1}{2}\|y_{1\bar{x}_1}\|_0^2 + \frac{1}{2}\|y_{2\bar{x}_2}\|_0^2.$$

由此得出

$$W_h \geqslant \frac{\mu}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{2}\|y_{\alpha\bar{x}_\beta}\|_0^2 = \frac{\mu}{2}\{\|\nabla y_1\|_0^2 + \|\nabla y_2\|_0^2\}.$$

所证明的不等式是第一边值问题科恩不等式的网格模拟. 从科恩不等式和关系式(64)推得

$$\mu(\|\nabla y_1\|_0^2 + \|\nabla y_2\|_0^2) \leqslant |(F_1, y_1)_\omega| + |(F_2, y_2)_\omega|. \quad (66)$$

对右端的两项再应用哥西不等式和 ε 不等式:

$$\sum_{\alpha=1}^{2}|(F_\alpha, y_\alpha)_\omega| \leqslant \sum_{\alpha=1}^{2}\left(\varepsilon\|y_\alpha\|_0^2 + \frac{1}{4\varepsilon}\|F_\alpha\|_0^2\right).$$

根据第五章 § 5 引理 7

$$\|y_1\|_0^2 + \|y_2\|_0^2 \leqslant (8/l_1^2 + 8/l_2^2)^{-1}(\|\nabla y_1\|_0^2 + \|\nabla y_2\|_0^2).$$

从而, 由前一个不等式和(66), 当取 $\varepsilon = \mu\left(\frac{8}{l_1^2} + \frac{8}{l_2^2}\right)/2$ 时得

$$\|\nabla y_1\|_0^2 + \|\nabla y_2\|_0^2 \leqslant \mu^{-2}\left(\frac{8}{l_1^2}+\frac{8}{l_2^2}\right)^{-1}(\|F_1\|_0^2+\|F_2\|_0^2).$$

这就是所要求的先验估计，从它可推出问题(62)，(63)的可解性，以及它的解对问题(60)，(61)的解的收敛性，收敛速度为 $O(|h|^2)$.

5. 矩形中的弹性理论方程组的混合边值问题. 我们讨论方程组(60)的混合问题.设在矩形 D 中要求解方程组(60)，在边界 Γ 上满足下述边界条件

$$u_1(x) = u_2(x) = 0, \tag{67}$$

当 $x_2 = l_2,\ 0 \leqslant x_1 \leqslant l_1$ 和

$x_1 = 0,\ x_1 = l_1,\ 0 \leqslant x_2 \leqslant l_2$;

$$\mu\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) = -f_1,$$

$$\lambda\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)+(\lambda+2\mu)\frac{\partial u_2}{\partial x_2} = -f_2, \tag{68}$$

当 $x_2 = 0,\ 0 \leqslant x_1 \leqslant l_1$.

在均匀的矩形网格 ϖ 上方程组(60)用网格方程(62)来逼近，而边界条件(67)则用网格边界条件

$$y_1(x) = y_2(x) = 0,$$

当 $x_2 = l_2,\ x_1 \in \varpi_1$ 和 $x_1 = 0,\ x_1 = l_1,\ x \in \varpi_2$ (69)

逼近. 边界条件(68)用第四章§4中(18)式类型的关系式来逼近，在第四章 § 4 已证明，这些关系式具有 $O(|h|^2)$ 的逼近误差：

$$\mu(y_{1x_2}+y_{2\bar{x}_1})+\frac{h_2}{2}[((\lambda+2\mu)y_{1\bar{x}_1})_{x_1}+(\lambda y_{2x_2})_{x_1}$$

$$+(\mu y_{2x_1})_{x_2}] = -f_1-\frac{h_2}{2}F_1(x_1,0),$$

$$\lambda y_{1\bar{x}_1} + (\lambda + 2\mu) y_{2x_2} + \frac{h_2}{2} [(\lambda y_{1x_1})_{x_2} + (\mu y_{1x_2})_{x_1}$$

$$+ (\mu y_{2\bar{x}_1})_{x_1}] = -f_2 - \frac{h_2}{2} F_2(x_1, 0), \quad (70)$$

$$当 \ x_2 = 0, \ x_1 \in \omega_1$$

我们研究网格问题(62)，(69)，(70)，它是问题(60)，(67)，(68)的逼近，误差为 $O(|h|^2)$. 将(62)中第一式乘以 $y_1(x) h_1 h_2$，第二式乘以 $y_2(x) h_1 h_2$，将所得的关系式按网格 ω 求和并相加，然后将边界条件(70)中第一式乘以 $y_1(x_1, 0) h_1$，第二式乘以 $y_2(x_1, 0) h_1$ 将所得的关系式按 ω_1 求和并相加. 现在将这个关系式添加到前面得到的那个式中，并且象在第4段中证明关系式(64)所作的那样变换求和号下的表达式. 利用边界条件(69)得到

$$2W_h = \sum_{\alpha=1}^{2} (F_\alpha, y_\alpha)_{\bar{\omega}} + \sum_{\alpha=1}^{2} \sum_{\omega_1} f_\alpha y_\alpha |_{x_2=0} h_1, \quad (71)$$

其中 W_h 由关系式(65)所确定.

估计 W_h 的下界. 因为出现在 W_h 中系数为 $\lambda/2$ 的表达式是非负的，所以

$$W_h \geqslant \frac{\mu}{2} \{2(\|y_{1\bar{x}_1}\|_0^2 + \|y_{2\bar{x}_2}\|_0^2) + I\}, \quad (72)$$

其中

$$I = \frac{1}{2} ((y_{1x_2} + y_{2\bar{x}_1})^2, 1)_{\omega_1^+ \times {}^+\omega_2}$$

$$+ \frac{1}{2} ((y_{1\bar{x}_2} + y_{2x_1})^2, 1)_{{}^+\omega_1 \times \omega_2^+}.$$

变换 I 的表达式，一方面作乘方，同时变换 $(y_{1x_2}, y_{2\bar{x}_1})_{\omega_1^+ \times {}^+\omega_2}$，首先对变量 x_2 利用第五章 §1 的分部求和公式(9)，然后对变量 x_1 利用同节的公式(8)，我们得到

$$(y_{1x_2},\ y_{2\bar{x}_1})_{+\omega_1\times{}^+\omega_2} = (y_{1x_1},\ y_{2\bar{x}_2})_{+\omega_1\times\omega_2^+} - \sum_{\omega_1^+} y_1 y_{2\bar{x}_1}|_{x_2=0} h_1.$$

类似地，有

$$(y_{1\bar{x}_2},\ y_{2\bar{x}_1})_{+\omega_1\times\omega_2^+} = (y_{1\bar{x}_1},\ y_{2x_2})_{\omega_1^+\times{}^+\omega_2} - \sum_{+\omega_1} y_1 y_{2x_1}|_{x_2=0} h_1.$$

考虑到所得的关系式，我们有

$$I = \|y_{1\bar{x}_2}\|_0^2 + \|y_{2\bar{x}_1}\|_0^2 + (y_{1x_1},\ y_{2\bar{x}_2})_{+\omega_1\times\omega_2^+} + (y_{1\bar{x}_1},\ y_{2x_2})_{\omega_1^+\times{}^+\omega_2} - \sum_{\omega_1^+} \frac{y_1 + y_1^{(-1_1)}}{2} y_{2\bar{x}_1} h_1. \tag{73}$$

现在利用哥西不等式和 ε 不等式(取 $\varepsilon = \alpha$) 来估计(73)右端第三和第四项，利用附录 2 中的定理和 ε 不等式 (取 $\varepsilon = \beta$) 来估计 (73) 的最后一项，得到

$$I \geqslant \|y_{1\bar{x}_2}\|_0^2 + \|y_{2\bar{x}_1}\|_0^2 - \alpha\|y_{1\bar{x}_1}\|_0^2 - \frac{1}{\alpha}\|y_{2\bar{x}_2}\|_0^2 - \beta\left[\varepsilon_1\|y_{1\bar{x}_2}\|_0^2 + \left(\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{l_1}{\pi l_2}\right)\|y_{1\bar{x}_1}\|_0^2\right] - \frac{1}{\beta}\left[\varepsilon_2\|y_{2\bar{x}_2}\|_0^2 + \left(\frac{1}{\varepsilon_2} + \frac{l_1}{\pi l_2}\right)\|y_{2\bar{x}_1}\|_0^2\right]. \tag{74}$$

因为 $I \geqslant 0$，则当 $\sigma \in [0,1]$ 时 $I \geqslant \sigma I$，根据这个不等式以及不等式(74)，从关系式(72)可得

$$2W_h \geqslant \mu\left\{\left[2 - \sigma\left(\alpha + \beta\left(\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{l_1}{\pi l_2}\right)\right)\right]\|y_{1\bar{x}_1}\|_0^2 + \left[2 - \sigma\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{\varepsilon_2}{\beta}\right)\right]\|y_{2\bar{x}_2}\|_0^2 + \sigma[1 - \beta\varepsilon_1]\|y_{1\bar{x}_2}\|_0^2 + \sigma\left[1 - \frac{1}{\beta}\right.\right.$$

$$\times\left(\frac{1}{\varepsilon_2}+\frac{l_1}{\pi l_2}\right)\Big]\ \|y_{2\bar{x}_1}\|_0^2\Big\}. \tag{75}$$

给参数 ε_2 和 α 以某些固定的值. 然后选取 β 使得 $\beta>(\frac{1}{\varepsilon_2}+\frac{l_1}{\pi l_2})$, 选取 ε_1 使 $0<\varepsilon_1<\beta^{-1}$, 以及 σ 使其满足条件

$$0<\sigma<\min\left\{1,\ 2\left[\alpha+\beta\left(\frac{1}{\varepsilon_1}+\frac{l_1}{\pi l_2}\right)\right]^{-1},\right.$$

$$\left.2\left[\frac{1}{\alpha}+\frac{\varepsilon_2}{\beta}\right]\right\},$$

不等式(75)的右端是函数 $y_{\alpha\bar{x}_\beta}$, $\alpha, \beta=1, 2$ 的范数的线性组合,各项系数都是正的. 因而

$$2W_h\geqslant m(\|\nabla y_1\|_0^2+\|\nabla y_2\|_0^2), \tag{76}$$

其中 $m\equiv m(\mu,\alpha,\beta,\sigma,\varepsilon_1,\varepsilon_2)>0$. 不等式(76)称为所考虑的混合问题的**科恩不等式**.

根据第五章 § 5 引理 10, $\|\nabla y_\alpha\|_0^2\geqslant M_1\|y_\alpha\|_1^2$, 因此代替(76)可以写出不等式

$$2W_h\geqslant mM_1(\|y_1\|_1^2+\|y_2\|_1^2).$$

根据这个不等式,从关系式(71)得到估计式

$$mM_1(\|y_1\|_1^2+\|y_2\|_1^2)$$

$$\leqslant\sum_{\alpha=1}^{2}\left\{|(F_\alpha, y_\alpha)_{\bar{\omega}}|+\Big|\sum_{\omega_1}f_\alpha y_\alpha\big|_{x_2=0}h_1\Big|\right\}. \tag{77}$$

我们估计这个不等式的右端,根据第五章 § 5 引理 10,哥西不等式及 ε 不等式便有

$$|(F_\alpha, y_\alpha)_{\bar{\omega}}|\leqslant\varepsilon\|F_\alpha\|_0^2+\frac{M_2^2}{4\varepsilon}\|y_\alpha\|_1^2.$$

其次,由哥西不等式,第五章 § 4 中的定理 4 以及 ε 不等式推得估计式

$$\left|\sum_{\omega_1}f_\alpha y_\alpha\big|_{x_2=0}h_1\right|\leqslant\varepsilon\|f_\alpha\|_{L_2(\omega_1)}^2+\frac{M_3^2}{4\varepsilon}\|y_\alpha\|_1^2.$$

利用这些估计式，从不等式(77)得出

$$\left(mM_1-\frac{M_2^2}{4\varepsilon}-\frac{M_3^2}{4\varepsilon}\right)(\|y_1\|_1^2+\|y_2\|_1^2)$$

$$\leqslant \varepsilon\sum_{\alpha=1}^{2}(\|F_\alpha\|_0^2+\|f_\alpha\|_{L_2(\omega_1)}^2).$$

选取足够大的 ε，得到问题(62)，(69)，(70)的解的先验估计：

$$\|y_1\|_1^2+\|y_2\|_1^2\leqslant M_4\sum_{\alpha=1}^{2}(\|F_\alpha\|_0^2+\|f_\alpha\|_{L_2(\omega_1)}^2).$$

从所得到的先验估计推得(62)，(69)，(70)的可解性，以及它的解对问题(60)，(67)，(68)的解的收敛性，收敛速度为 $O(|h|^2)$.

§2. 格林函数方法

考虑差分问题

$$\bar{\Lambda}y=\sum_{\alpha=1}^{2}\bar{\Lambda}_\alpha y=-\Phi(x),\qquad x\in\bar{\omega},\tag{1}$$

$$(\Phi,1)_{\bar{\omega}}=0,\tag{2}$$

$$(y,1)_{\bar{\omega}}=q.\tag{3}$$

其中

$$\bar{\Lambda}_\alpha y=\begin{cases}\dfrac{2}{h_\alpha}y_{x_\alpha}, & x_\alpha=0,\\ y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}, & x_\alpha\in\omega_\alpha,\\ -\dfrac{2}{h_\alpha}y_{\bar{x}_\alpha}, & x_\alpha=l_\alpha.\end{cases}$$

网格 $\bar{\omega}$ 假定是均匀的．今考虑算子 $\bar{\Lambda}$ 的格林函数．因为

对于算子 $\bar{\Lambda}$，零是它的谱点，与它相对应的固有函数是常数，所以要讨论的是广义格林函数．它的定义如下：

$$\bar{\Lambda}G(x,\xi)=\kappa-\delta(x,\xi),\qquad x\in\bar{\omega},\ \kappa=(\mathrm{mes}D)^{-1},\tag{4}$$

$$(G(x,\xi),1)_{\bar{\omega}}=Q=\mathrm{const}.\tag{5}$$

通过简单的计算不难得知，问题(1)—(3)的解可表示为

$$\begin{aligned}y(x)=&(G(x,\xi),\varphi(\xi))_{\bar{\omega}}+(G(x,\xi),g(\xi))_{\gamma}\\&+\kappa(y(\xi),1)_{\bar{\omega}}.\end{aligned}\tag{6}$$

由(6)式可知

$$\begin{aligned}\|y(x)\|_C\leqslant&\max_{x\in\bar{\omega}}(\|G(x,\xi)\|_{L_1}\|\varphi\|_C+\|G(x,\xi)\|'_{L_1}\|g\|'_C)\\&+\kappa|(y(\xi),1)_{\bar{\omega}}|.\end{aligned}\tag{7}$$

如果(7)中 $G(x,\xi)$ 的范数关于 h 是一致有界，则(7)给出问题(1)—(3)的解的先验估计．

为了得到格林函数的上述范数估计，我们将应用它的按算子 $\bar{\Lambda}$ 的固有函数的展开式．可以证明，对满足(4)，(5)的函数 $G(x,\xi)$，按算子 $\bar{\Lambda}$ 的固有函数的展开式具有如下形式

$$G(x,\xi)=Q\kappa+\sum_{|k|\neq0}\frac{\mu_k(x)\mu_k(\xi)}{\lambda_k},\tag{8}$$

其中

$$|k|^2=\sum_{\alpha=1}^{2}k_\alpha^2,\qquad k_\alpha=0,1,\cdots,N_\alpha,$$

而 $\mu_k(x)$ 和 λ_k 由第五章§3的公式(33)，(19)，(20)确定．

引理 1. 如果格林函数 $G(x,\xi)$ 在单位圆上的投影满足条件

$$Q\geqslant 2l_0^2,\qquad l_0=\max(l_1,l_2),\tag{9}$$

则 $G(x,\xi)$ 在 $\bar{\omega}$ 上非负，且成立关系式

$$\max_{x\in\bar{\omega}}\|G(x,\xi)\|_{L_1}=Q,$$

$$\max_{x\in\bar{\omega}}\|G(x,\xi)\|'_{L_1}\leqslant\left(2Q\kappa+\frac{\pi^2}{6}\right)(l_1+l_2).$$

证明. 设 $G(x,\xi;d)=G^{(1)}(x,\xi;d)$ 是算子 $(\bar{\Lambda}-dE)$ 的格林函数 ($d=\text{const}>0$), 而 $G^{(m)}(x,\xi;d)$ 是它的叠式, 它由关系式

$$(-\bar{\Lambda}+dE)^m G^{(m)}(x,\xi;d)=\delta(x-\xi),$$
$$m=1,2,\cdots,n$$

确定. 比较函数 $G(x,\xi)$ 与 $\sum_{m=1}^{n} d^{m-1}G^{(m)}(x,\xi;d)$. 因为算子 $\bar{\Lambda}$, $(\bar{\Lambda}-dE)$ 和 $(\bar{\Lambda}-dE)^m$ 有公共固有函数系, 则

$$G^{(m)}(x,\xi;d)=\frac{\kappa}{d^m}+\sum_{|k|\neq 0}\frac{\mu_k(x)\mu_k(\xi)}{(\lambda_k+d)^m};$$
$$m=1,2,\cdots,n. \tag{10}$$

由(8)和(10), 得到

$$G(x,\xi)-\sum_{m=1}^{n} d^{m-1}G^{(m)}(x,\xi;d)$$
$$=\left(Q-\frac{n}{d}\right)\kappa+d^n$$
$$\times\sum_{|k|\neq 0}\frac{\mu_k(x)\mu_k(\xi)}{\lambda_k(\lambda_k+d)^n}. \tag{11}$$

很明显, 适当选取参数 n 总可以保证(11)右端的和关于 $|h|$ 一致有界, 对二维空间情形 n 只要选取等于 1. 假设这个和的绝对值以 M 为界, 此时从(11)推得, 当

$$Q\geqslant\frac{1}{d}+\frac{dM}{\kappa}=Q(d) \tag{12}$$

时, 对于函数 $G(x,\xi)$ 有下界估计式

$$G(x,\xi)\geqslant G^{(1)}(x,\xi;d). \tag{13}$$

但是对于算子 $(\bar{\Lambda}-dE)$ 当 $d>0$ 时成立最大模原理. 因

而，根据第三章 § 3 定理 1 的推论 1 有 $G(x, \xi; d) \geqslant 0$[1]. 从条件 (12) 满足时函数 $G(x, \xi)$ 的非负性，显然可以推出它的范数在 ϖ 上的估计. 事实上

$$\max_{x \in \varpi} \|G(x, \xi)\|_{L_1} = \max_{x \in \varpi} (G(x, \xi), 1)_{\varpi} = Q.$$

其次

$$\|G(x, \xi)\|'_{L_1} = (G(x, \xi), 1)_{\Gamma}$$

$$= \sum_{|k| \neq 0} \frac{\mu_k(x)}{\lambda_k} (\mu_k(\xi), 1)_{\Gamma} + Q\kappa \operatorname{mes}\Gamma. \quad (14)$$

又

$$(\mu_k(\xi), 1)_{\Gamma} = (\mu_{k_1}(\xi_1)\mu_{k_2}(\xi_2), 1)_{\Gamma}$$

$$= \delta_{0,k_1}[\mu_{k_2}(0) + \mu_{k_2}(l_2)]/\sqrt{l_1}$$

$$+ \delta_{0,k_2}[\mu_{k_1}(0) + \mu_{k_1}(l_1)]/\sqrt{l_2},$$

其中 $\delta_{\alpha\beta}$ 是克罗内克记号.

将这表达式代入 (14) 并考虑到第五章 § 3 中的 (33), (19), (21) 得到

$$\|G(x, \xi)\|'_{L_1} = \sum_{k_1=1}^{N_1} \mu_{k_1}(x_1)(\mu_{k_1}(0) + \mu_{k_1}(l_1))/\lambda_{k_1}$$

$$+ \sum_{k_2=1}^{N_2} \mu_{k_2}(x_2)(\mu_{k_2}(0) + \mu_{k_2}(l_2))/\lambda_{k_2} + Q\kappa \operatorname{mes}\Gamma$$

$$\leqslant (l_1 + l_2) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} + Q\kappa \operatorname{mes}\Gamma$$

$$= 2Q\kappa + \frac{\pi^2}{6}(l_1 + l_2). \quad (15)$$

---

1) 由格林函数 $G^{(1)}(x, \xi; d)$ 的非负性推得所有各项迭式的非负性，因为 $G^{(2)}(x, \xi; d) = (G^{(1)}(x, \eta; d), G^{(1)}(\eta, \xi; d))_{\varpi}$ 等等.

现在要证明，从条件(12)满足时 $G(x, \xi)$ 的非负性可推出当条件(9)满足时它也有非负性. 为此要找一个用来估计(11)右端和式的绝对值的常数 M，根据第五章 § 3 中(33)式函数 $\mu_k(x)$ 的形式，得到

$$\left|\sum_{|k|\neq 0}\frac{\mu_k(x)\mu_k(\xi)}{\lambda_k(\lambda_k+d)}\right|\leqslant 4\kappa\sum_{|k|\neq 0}\lambda_k^{-1}(\lambda_k+d)^{-1}, \quad (16)$$

又因为由第五章 § 3 中的(33)和(21)有

$$\lambda_k\geqslant\frac{4}{l_0^2}(k_1^2+k_2^2),$$

故

$$\begin{aligned}\sum_{|k|\neq 0}\lambda_k^{-1}(\lambda_k+d)^{-1}&\leqslant(l_0/2)^4\sum_{|k|\neq 0}^{\infty}|k|^{-4}\\&=(l_0/2)^4\left[2\sum_{k=1}^{\infty}k^{-4}-\frac{1}{4}+2\sum_{k=1}^{\infty}(1+k^2)^{-2}\right.\\&\qquad\left.+\sum_{k_1,k_2=2}^{\infty}(k_1^2+k_2^2)^{-2}\right]\\&\leqslant\left(\frac{l_0}{2}\right)^4\left[\frac{\pi^4}{45}-\frac{1}{4}+2\int_0^{\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^2}\right.\\&\qquad\left.+\frac{\pi}{2}\int_1^{\infty}\frac{dr}{r^3}\right]=\left(\frac{l_0}{2}\right)^4\left[\frac{\pi^4}{45}+\frac{2\pi-1}{2}\right]\\&<\frac{l_0^4}{4}. \end{aligned}\quad (17)$$

将它代入(16)得

$$\left|\sum_{|k|\neq 0}\frac{\mu_k(x)\mu_k(\xi)}{\lambda_k(\lambda_k+d)}\right|\leqslant\kappa l_0^4.$$

这样就得到了常数M.为了完成证明,我们应用所得的估计式并求泛函 $Q(d)$ 关于 d 的极小值. 容易验证

$$\min_{d>0}Q(d)=2l_0^2.$$

引理 1 得证.

定理 1. 问题(1)—(3)的解存在且唯一，并且成立先验估计

$$\|y\|_c \leqslant 2l_0^2\|\varphi\|_c + \left(4\,l_0^2\kappa + \frac{\pi^2}{6}\right)$$

$$\times (l_1 + l_2)\|g\|_c' + \kappa|[y,1]|.$$

证明. 问题的解的存在性和唯一性可由前节的定理 5 推得,而先验估计可从引理 1 和不等式(7)推得.

从定理 1 和前节的结果推得

定理 2. 如果当 $k_\alpha = 1$, $d(x) = \kappa = 0$ 时 § 1 中的问题(40),(41),(58),(59)的解 $u(x) \in C^4(D)$，那么当问题(1)—(3)的右端按 § 1 定理 9 给出时,它的解以速度 $O(|h|^2)$ 一致收敛于所逼近问题的解,即

$$\|y - u\|_C \leqslant M|h|^2.$$

其中M为不依赖于$|h|$的正常数.

附 录 一

曲线边界上第三类边值条件的逼近
（非协调网格）

在第四章§3第五段曾对泊松方程在一种特殊结构的（协调的）网格上建立了所述的边界条件的逼近． 这里我们考虑在更一般的情况下，即在非协调网格上，对于具有曲线边界的泊松方程第三类边值条件的逼近． 我们用里兹方法来构造边值条件以及靠近边界处方程的网格逼近．

设在边界为Γ的区域G上求解问题

$$\Delta u = -f(x),\ x\in G,\ \frac{\partial G}{\partial n} = \kappa(x)u - g(x),\ x\in\Gamma, \tag{1}$$

其中函数$\kappa(x)\geqslant 0$，当$x\in\Gamma$，且$\kappa(x)\not\equiv 0$． 求问题(1)的解等价于找函数$u(x)\in w_2^1(G)$使下面泛函取极小值：

$$I(u)\equiv\frac{1}{2}\int_G\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2\right]dx+\frac{1}{2}\int_\Gamma\kappa(x)u^2ds$$
$$-\int_G f(x)u(x)dx-\int_\Gamma g(x)u(x)ds. \tag{2}$$

今用均匀的矩形网格

$$\Omega=\{x=(x_1^{(i_1)},x_2^{(i_2)})\,|\,x_\alpha^{(i_\alpha)}=h_\alpha i_\alpha,$$
$$i_\alpha=0,\pm1,\pm2,\cdots;\ \alpha=1,2\}$$

覆盖平面Ox_1x_2． 每个小矩形

$$G[i]=\{x=(x_1,x_2)\,|\,x_\alpha^{(i_\alpha)}\leqslant x_\alpha\leqslant x_\alpha^{(i_\alpha+1)},\ \alpha=1,2\}$$

用与Ox_1轴的交角为$\mathrm{arctg}\,h_2/h_1$的对角线分成两个三角形． 像在第四章§2第二段那样，用$\bar G_h$表示由上述三角形组成的包含区域G的最小和集，并取在$\bar G_h$上连续且在每个三角形上是线性的函数所成的空间作为空间$W_2^1(G)$的有限维子空间V． 设$\bar\omega=\bar G_h\cap\Omega$是问题(1)的网

格，$\omega = \bar{\omega} \cap G$ 是网格的内节点集合，而 $\gamma = \bar{\omega} \backslash \omega$ 是边界节点集合．记 $\mathfrak{M} = \{i = (i_1, i_2) | x_i \in \omega\}$.

问题（1）的近似解取成形式

$$\tilde{u}(x) = \sum_{j \in \mathfrak{M}} y_j \eta_j(x),\ j = (j_1, j_2), \tag{3}$$

其中 $\{\eta_j\}$ 为空间 V 的基，它的元 $\eta_j(x)$ 由第四章 § 2 关系式（16）给出。

按通常那样，将关系式(3)代入泛函(2)，将所得表达式对 y_i 微分并令结果为零．从而得到方程组

$$\sum_{j \in \mathfrak{M}} A_i^j y_j = \Phi_i,\ i \in \mathfrak{M}. \tag{4}$$

这里方程组的系数按以下公式计算：

$$A_i^j = \int_G \left[\frac{\partial \eta_i}{\partial x_1} \frac{\partial \eta_j}{\partial x_1} + \frac{\partial \eta_i}{\partial x_2} \frac{\partial \eta_j}{\partial x_2} \right] dx + \int_\Gamma \kappa \eta_i \eta_j ds; \tag{5}$$

而右端的元按以下公式计算：

$$\Phi_i = \int_G f \eta_i dx + \int_\Gamma g \eta_i ds. \tag{6}$$

我们来计算系数 A_i^j 和右端 Φ_i，其中 i 是相应于边界节点 γ 以及 ω 中与 γ 毗邻的内点．为了有可能使计算进行到底，我们假定在所考虑的节点附近边界是直线．此外，为简单起见，假定在所考虑的边界段上 $\kappa(x) = 0$.

设 $x_i \in \omega$，而 $x_{i'} \in \gamma$，其中 $i' = (i_1 + 1, i_2)$．假定节点 x_i 位于坐标原点，即 $i_1 = i_2 = 0$，在这个节点附近的边界 Γ 由方程

$$\frac{x_1}{\theta_1 h_1} + \frac{x_2}{\theta_2 h_2} = 1 \tag{7}$$

给出，其中 $0 < \theta_1,\ \theta_2 < 1$.

今计算方程(4)在内节点（0, 0）和边界节点（h_1, h_2）上的系数和右端．对我们往后感兴趣的一些节点按下述方式重新编号：0——坐标原点，1——节点（h_1, 0），2——节点(0, h_2)，3——节点（$-h_1$, 0），4——节点（0, $-h_2$），5——节点（h_1, h_2）．将第四章 § 2 中导数 $\frac{\partial \eta_i}{\partial x_\alpha}$ 的表达式(20)代入(5)，并考虑到由方程(7)所给出的边界同直线

$x_1/h_1 - x_2/h_2 = 0$ 与 $x_1/h_1 - x_2/h_2 = \mp 1$ 交点的坐标分别为

$$\left(\frac{\theta_1\theta_2}{\theta_1+\theta_2}h_1, \frac{\theta_1\theta_2}{\theta_1+\theta_2}h_2\right),$$

$$\left(-\frac{\theta_1(1-\theta_2)}{\theta_1+\theta_2}h_1, \frac{(1+\theta_1)\theta_2}{\theta_1+\theta_2}h_2\right),$$

$$\left(\frac{\theta_1(1+\theta_2)}{\theta_1+\theta_2}h_1, -\frac{(1-\theta_1)\theta_2}{\theta_1+\theta_2}h_2\right).$$

我们来求方程的系数.

对于点 0:

$$A_0^1 = -\frac{h_2}{2h_1}\frac{\theta_1(1+2\theta_2)}{\theta_1+\theta_2}, \quad A_0^2 = -\frac{h_1}{2h_2}\frac{\theta_2(1+2\theta_1)}{\theta_1+\theta_2},$$

$$A_0^3 = -\frac{h_2}{2h_1}\frac{\theta_1+2\theta_2+2\theta_1\theta_2-\theta_1\theta_2^2}{\theta_1+\theta_2},$$

$$A_0^4 = -\frac{h_1}{2h_2}\frac{2\theta_1+\theta_2+2\theta_1\theta_2-\theta_1^2\theta_2}{\theta_1+\theta_2},$$

$$A_0^0 = -(A_0^1 + A_0^2 + A_0^3 + A_0^4).$$

对于点 5:

$$A_5^1 = -\frac{h_1}{2h_2}\frac{\theta_1^2\theta_2}{\theta_1+\theta_2},$$

$$A_5^2 = -\frac{h_2}{2h_1}\frac{\theta_1\theta_2^2}{\theta_1+\theta_2}, \quad A_5^5 = -(A_5^1 + A_5^2).$$

将第四章 § 2 中 $\eta_i(x)$ 的表达式(16)代入(6),求得

$$\Phi_0 = \int_{G\cap G[0]} f(x)\eta_0(x)dx + \int_\Gamma g(x)\eta_0(x)ds,$$

$$\Phi_5 = \int_{G\cap G[5]} f(x)\eta_5(x)dx + \int_\Gamma g(x)\eta_5(x)ds.$$

如果在所讨论的点 0 附近函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是常数,则

$$\Phi_0 = f\frac{h_1h_2}{6(\theta_1+\theta_2)^2}[3(\theta_1+\theta_2)^2 + 6\theta_1\theta_2(\theta_1+\theta_2)$$

$$+ \theta_1^2\theta_2^2(\theta_1+\theta_2) - 2\theta_1^2\theta_2^2(\theta_1^2+\theta_2^2)] + g\frac{\sqrt{h_1^2\theta_1^2+h_2^2\theta_2^2}}{\theta_1+\theta_2}$$

$$\times\left(1-\frac{\theta_1\theta_2}{2}\right),$$

$$\Phi_5 = f\frac{h_1h_2}{6}\frac{\theta_1^2\theta_2^2}{\theta_1+\theta_2} + g\frac{\sqrt{h_1^2\theta_1^2+h_2^2\theta_2^2}}{2(\theta_1+\theta_2)}\theta_1\theta_2.$$

将所得的系数和右端代入(4)则得到下面方程:

$$\frac{1}{h_1}\left[\frac{\theta_1(1+2\theta_2)}{2(\theta_1+\theta_2)}\frac{y_1-y_0}{h_1} - \frac{\theta_1+2\theta_2+2\theta_1\theta_2-\theta_1\theta_2^2}{2(\theta_1+\theta_2)}\right.$$

$$\left.\times\frac{y_0-y_3}{h_1}\right] + \frac{1}{h_2}\left[\frac{\theta_2(1+2\theta_1)}{2(\theta_1+\theta_2)}\frac{y_2-y_0}{h_2}\right.$$

$$\left.-\frac{\theta_2+2\theta_1+2\theta_1\theta_2-\theta_1^2\theta_2}{2(\theta_1+\theta_2)}\frac{y_0-y_4}{h_2}\right]$$

$$= -\frac{1}{h_1h_2}\Phi_0,$$

$$\frac{h_2}{2}\frac{\theta_1\theta_2^2}{\theta_1+\theta_2}\frac{y_5-y_2}{h_1} + \frac{h_1}{2}\frac{\theta_1^2\theta_2}{\theta_1+\theta_2}\frac{y_5-y_1}{h_2} = -\Phi_5.$$

附 录 二

网格函数乘积的迹的估计

当向量函数 $y=(y_1(x),\ y_2(x))$ 只是在网格矩形的三边上均为零时,要证明科恩不等式的网格模拟,我们必须会估计

$$\sum_{x_1\in\omega_1^+}\frac{y_1+y_1^{(-1_1)}}{2}y_{2\bar{x}_1}h_1,$$

其中 $x_2\in\bar{\omega}_2$ 是固定的值. 我们感兴趣的估计式由以下定理给出

定理 1. 对任意一对给定在均匀网格 $\bar{\omega}=\bar{\omega}_1\times\bar{\omega}_2$ 上且在 $x_1=0$ 和 $x_1=l_1$ 上都为零的网格函数 $u(x)$ 和 $v(x)$, 成立不等式

$$\begin{aligned}\Bigg\|\sum_{x_1\in\omega_1^+}&h_1\frac{u(x)+u^{(-1_1)}(x)}{2}v_{\bar{x}_1}\Bigg\|_{c(\bar{\omega}_2)}\\&\leqslant\left\{\varepsilon_1\|u_{\bar{x}_2}\|_0^2+\left(\frac{1}{\varepsilon_1}+\frac{l_1}{\pi l_2}\right)\|u_{\bar{x}_1}\|_0^2\right\}^{1/2}\\&\quad\times\left\{\varepsilon_2\|v_{\bar{x}_2}\|_0^2+\left(\frac{1}{\varepsilon_2}+\frac{l_1}{\pi l_2}\right)\|v_{\bar{x}_1}\|_0^2\right\}^{1/2},\end{aligned}\tag{1}$$

其中 ε_1, ε_2 是任意的正常数.

证明. 分三步证明. 第一步我们证明,不等式 (1) 可从对于连续变量函数的类似不等式推出,即从下面不等式推出

$$\begin{aligned}\sup_{0<y_2<l_2}&\left|\int_0^{l_1}\tilde{u}(y)\frac{\partial\tilde{v}(y)}{\partial y_1}dy_1\right|\\&\leqslant\left\{\varepsilon_1\left\|\frac{\partial\tilde{u}}{\partial y_2}\right\|^2_{L_2(\bar{D})}+\left(\frac{1}{\varepsilon_1}+\frac{l_1}{\pi l_2}\right)\left\|\frac{\partial\tilde{u}}{\partial y_1}\right\|^2_{L_2(\bar{D})}\right\}^{1/2}\\&\quad\times\left\{\varepsilon_2\left\|\frac{\partial\tilde{v}}{\partial y_2}\right\|^2_{L_2(\bar{D})}+\left(\frac{1}{\varepsilon_2}+\frac{l_1}{\pi l_2}\right)\left\|\frac{\partial\tilde{v}}{\partial y_1}\right\|^2_{L_2(\bar{D})}\right\}^{1/2}.\end{aligned}\tag{2}$$

然后建立估计式

$$\left|\int_0^{l_1}\tilde{u}(y)\frac{\partial\tilde{v}}{\partial y_1}dy_1\right|\leqslant\|\tilde{u}\|_{\overline{W}_2^{1/2}[0,l_1]}\|\tilde{v}\|_{\overline{W}_2^{1/2}[0,l_1]},\tag{3}$$

其中 $\|\cdot\|_{\overline{W}_2^{1/2}[0,l_1]}$ 是下面将要定义的一种范数. 再对于函数 $\tilde{u}(y)$ 和 $\tilde{v}(y)$ 得到形如

$$\sup_{0\leqslant y_2\leqslant l_2}\|\tilde{w}(y)\|^2_{\overline{D}_2^{1/2}[0,l_1]}\leqslant\varepsilon\left\|\frac{\partial\tilde{w}}{\partial y_2}\right\|^2_{L_2(\overline{D})}$$

$$+\left(\frac{1}{\varepsilon}+\frac{l_1}{\pi l_2}\right)\left\|\frac{\partial\tilde{w}}{\partial y_1}\right\|^2_{L_2(\overline{D})}\tag{4}$$

的估计式,由此就可完成定理的证明,上式中 ε 为任意的正数.

我们来实现拟定的计划. 1) 设 $\overline{D}=\{y=(y_1,y_2)|0\leqslant y_\alpha\leqslant l_\alpha;\ \alpha=1,2\}$ 是矩形,而 $\overline{\omega}=\overline{\omega}_1\times\overline{\omega}_2$ 是矩形 D 上的网格,其中

$$\overline{\omega}_\alpha=\{x_\alpha=h_\alpha i_\alpha|i_\alpha=0,1,\cdots,N_\alpha;\ N_\alpha=l_\alpha/h_\alpha\}.$$

用直线 $y_\alpha=h_\alpha i_\alpha$ 和 $y_2=\frac{h_2}{h_1}y_1+h_\alpha i_\alpha$, 其中 $i_\alpha=0,\pm1,\pm2,\cdots$, 将矩形 $\overline{D}$ 分为相同的直角三角形,它们的顶点就是网格 $\overline{\omega}$ 的节点. 对网格函数 $u(x)$ 和 $v(x)$, $x\in\overline{\omega}$, 构造它们的分段线性杆值 $\tilde{u}(y)$ 和 $\tilde{v}(y)$, 这些函数是连续的,在每一个上述的三角形上是线性的,且当 $y=x\in\overline{\omega}$ 时 $\tilde{u}(y)=u(x)$, $\tilde{v}(y)=v(x)$. 函数 $\tilde{u}(y)$ 和 $\tilde{v}(y)$ 的导数 $\frac{\partial\tilde{u}}{\partial y_\alpha}$ 和 $\frac{\partial\tilde{v}}{\partial y_\alpha}$ 是分段常数,所以

$$\|u_{\bar{x}_\alpha}\|_0^2=\int_0^{l_1}\int_0^{l_2}\left(\frac{\partial\tilde{u}}{\partial y_\alpha}\right)^2dy_1dy_2,$$

$$\|v_{\bar{x}_\alpha}\|_0^2=\int_0^{l_1}\int_0^{l_2}\left(\frac{\partial\tilde{v}}{\partial y_\alpha}\right)^2dy_1dy_2.\tag{5}$$

其次,

$$\sum_{x_1\in\omega_1^+}h_1\frac{u(x)+u^{(-1_1)}(x)}{2}v_{\bar{x}_1}(x)$$

与积分

$$\int_0^{l_1}\tilde{u}(y)\frac{\partial\tilde{v}(y)}{\partial y_1}dy_1$$

的梯形求积分式是一样的, 又因为 $\tilde{u}\partial\tilde{v}/\partial y_1$ 是分段线性, 则当 $y_2=x_2\in\overline{\omega}_2$ 时

$$\sum_{x_1\in\omega_1^+} h_1 \frac{u(x)+u^{(-1_1)}(x)}{2} v_{\bar{x}_1}(x)$$

$$=\int_0^{l_1} \tilde{u}(y)\frac{\partial\tilde{v}(y)}{\partial y_1}\,dy_1. \qquad (6)$$

从而推得

$$\left\|\sum_{x_1\in\omega_1^+} h_1 \frac{u(x)+u^{(-1_1)}(x)}{2} v\bar{x}_1(x)\right\|_{c(\bar{\omega}_2)}$$

$$\leqslant \sup_{0\leqslant y_2\leqslant l_2}\left|\int_0^{l_1} \tilde{u}(y)\frac{\partial\tilde{v}(y)}{\partial y_1}\,dy_1\right|. \qquad (7)$$

考虑到关系式(5)—(7),我们断定,如果不等式(2)成立,则定理将被证明.

2) 现在证明不等式(3),设 $w(y_1)$ 为给定在区间 $[0, l_1]$ 上的函数,且当 $y_1=0$ 和 $y_1=l_1$ 时等于零,记

$$\|w\|^2_{\bar{W}_2^{1/2}[0,l_1]}=\sum_{k=1}^{\infty} w_k^2\frac{k\pi}{l_1}, \qquad (8)$$

其中 w_k 为函数 $w(y_1)$ 按正交系 $\left\{\sqrt{2/l_1}\ \sin\ \frac{k\pi y_1}{l_1}\right\}_1^{\infty}$ 展开时的傅里叶系数,即

$$w_k=\sqrt{2/l_1}\int_0^{l_1} w(y_1)\sin\frac{k\pi y_1}{l_1}\,dy_1,\ k=1,2,\cdots.$$

当固定 $y_2\in[0, l_2]$ 时,按上述正交系展开 $\tilde{u}(y)$ 和 $\tilde{v}(y)$,

$$\tilde{u}(y)=\sqrt{\frac{2}{l_1}}\sum_{k=1}^{\infty}\tilde{u}_k(y_2)\sin\frac{k\pi y_1}{l_1},$$

$$\tilde{v}(y)=\sqrt{\frac{2}{l_1}}\sum_{k=1}^{\infty}\tilde{v}_k(y_2)\sin\frac{k\pi y_1}{l_1}.$$

将这两个展开式代入不等式(3)的左端,并且进行简单的计算,得出

$$\int_0^{l_1}\tilde{u}(y)\frac{\partial\tilde{v}(y)}{\partial y_1}\,dy_1=\frac{2}{l_1}$$

$$\times\sum_{\substack{p,q=1\\ p\neq q}}^{\infty}\frac{pq}{p^2-q^2}[1-(-1)^{p+q}]\tilde{u}_p(y_2)\tilde{v}_q(y_2).$$

根据定义(8)和这一关系式,可以断定,如能证明双线性型

$$A(\xi, \eta) \equiv \sum_{\substack{p,q=1 \\ p \neq q}}^{\infty} a_{pq} \xi_p \eta_q \tag{9}$$

是有界的，其中

$$a_{pq} = \frac{\sqrt{pq}}{p^2 - q^2} [1 - (-1)^{p+q}], \quad p \neq q, \tag{10}$$

而且上界为常数 $\frac{\pi}{2}$，即

$$|A(\xi, \eta)| \leqslant \frac{\pi}{2} \left(\sum_{p=1}^{\infty} \xi_p^2 \sum_{q=1}^{\infty} \eta_q^2 \right)^{1/2}, \tag{11}$$

则不等式(3)成立.

我们证明不等式(11). 首先考察双线性型 $B(\xi, \eta)$，它的系数由式

$$b_{pq} = \frac{1 - (-1)^{p+q}}{p - q}, \quad p \neq q, \quad b_{pp} = 0 \tag{12}$$

确定，并且证明，$B(\xi, \eta)$ 是以 π 为上界. 为此我们引入系数为

$$c_{pq} = \frac{1 - (-1)^{p+q}}{p + q}$$

的双线性型 $C(\xi, \eta)$ 以及它们的共轭式 $B'(\xi, \eta)$ 和 $C'(\xi, \eta)$，后者的系数矩阵 B' 和 C' 分别与双线性型 $B(\xi, \eta)$ 和 $C(\xi, \eta)$ 的系数矩阵 B 和 C 成共轭. 我们按照 $B(\xi, \eta)$ 和 $C(\xi, \eta)$ 及其共轭构造双线性型 $F(\xi, \eta)$ 和 $G(\xi, \eta)$，它们的系数矩阵 F 和 G 分别是矩阵 B 与 B' 和 C 与 C' 的乘积，即

$$f_{pq} = \sum_{k=1}^{\infty} b_{pk} b_{qk}, \quad g_{pq} = \sum_{k=1}^{\infty} c_{pk} c_{qk}.$$

很明显，矩阵 F 和 G 是对称和非负的：$F = F'$，$G = G'$，$F(\xi, \xi) \geqslant 0$，$G(\xi, \xi) \geqslant 0$.

设二次型 $F(\xi, \xi)$ 是以常数 M^2 为上界：$F(\xi, \xi) \leqslant M^2 \sum_{p=1}^{\infty} \xi_p^2$. 于是

$$|B(\xi, \eta)| = \left| \sum_{q=1}^{\infty} \eta_q \sum_{p=1}^{\infty} b_{pq} \xi_p \right|$$

$$\leqslant \left(\sum_{q=1}^{\infty} \eta_q^2 \right)^{1/2} \left\{ \sum_{q=1}^{\infty} \left(\sum_{p=1}^{\infty} b_{pq} \xi_p \right)^2 \right\}^{1/2}$$

$$= \left(\sum_{q=1}^{\infty} \eta_q^2\right)^{1/2} \{F(\xi, \xi)\}^{1/2}$$

$$\leqslant M \left(\sum_{p=1}^{\infty} \xi_p^2 \sum_{q=1}^{\infty} \eta_q^2\right)^{1/2}, \tag{13}$$

即从二次型 $F(\xi, \xi)$ 以常数 M^2 为上界可以推出双线性型 $B(\xi, \eta)$ 以常数 M 为上界，因此只要证明 $F(\xi, \xi)$ 的有界性就够了．其次，因为 $G(\xi, \xi) \geqslant 0$，所以 $F(\xi, \xi) \leqslant F(\xi, \xi) + G(\xi, \xi) \equiv H(\xi, \xi)$.

估计二次型 $H(\xi, \xi)$. 首先计算它的系数：

$$h_{pp} = f_{pp} + g_{pp} = \sum_{k=1}^{\infty} (b_{pk}^2 + c_{pk}^2)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} [1 - (-1)^{p+k}]^2 \left[\frac{1}{(p+k)^2} + \frac{1}{(p-k)^2}\right]$$

$$= 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} [1 - (-1)^{p+k}] \frac{1}{(p+k)^2}$$

$$- 2[1 - (-1)^p] \frac{1}{p^2}.$$

替换求和指标 $p + k = k'$ 并省去“,”号得

$$h_{pp} = 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} [1 - (-1)^k] \frac{1}{k^2} - 2[1-(-1)^p] \frac{1}{p^2}$$

$$= 8 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} - 2[1 - (-1)^p] \frac{1}{p^2}.$$

已知[1] $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$，因此

$$h_{pp} = \pi^2 - 2[1 - (-1)^p] \frac{1}{p^2}.$$

当 $p \neq q$ 时

---

1) Градштейн И. С., рыжик И. М., «积分，求和，级数和乘积表»，莫斯科科学出版社 1971，公式 0.234.2.

$$h_{pq} = \sum_{k=1}^{\infty} (b_{pk}b_{qk} + c_{pk}c_{qk})$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} [1-(-1)^{p+k}][1-(-1)^{q+k}]$$

$$\times \left[\frac{1}{(p+k)(q+k)} - \frac{1}{(p-k)(q-k)}\right]$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{[1-(-1)^{p+k}][1-(-1)^{q+k}]}{(p+k)(q+k)}$$

$$- \frac{[1-(-1)^{p}][1-(-1)^{q}]}{pq}$$

$$= \bar{h}_{pq} - \frac{[1-(-1)^{p}][1-(-1)^{q}]}{pq}.$$

我们现在来研究 $\bar{h}_{pq}$:

$$\bar{h}_{pq} = \frac{1}{p-q} \sum_{k=-\infty}^{\infty} [1-(-1)^{p+k}][1-(-1)^{q+k}]$$

$$\times \left[\frac{1}{(q+k)} - \frac{1}{(p+k)}\right]$$

$$= \frac{4}{p-q}\begin{cases} \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{q+2k-1} - \frac{1}{p+2k-1}\right], & \text{当 } p \text{ 和 } q \text{ 为偶数,} \\ \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{q+2k} - \frac{1}{p+2k}\right], & \text{当 } p \text{ 和 } q \text{ 为奇数,} \\ 0, & \text{当 } p+q \text{ 为奇数.} \end{cases}$$

现在分别研究每个和式:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{q+2k-1} - \frac{1}{p+2k-1}\right]$$

$$= \lim_{K\to\infty} \sum_{k=-K}^{K}\left[\frac{1}{q+2k-1} - \frac{1}{p+2k-1}\right].$$

未取极限的表达式可以写为如下形式:

$$\sum_{k=-K}^{K}\left[\frac{1}{q+2k-1} - \frac{1}{p+2k-1}\right]$$

$$= \sum_{i=-K}^{K} \frac{1}{q+2i-1} - \sum_{j=-K}^{K} \frac{1}{p+2j-1} = h_{pq}^{(1)}(K).$$

因为 p 和 q 为偶数，所以每一个和式中均可作指标替换： $q+2i=2k$，$p+2j=2k$，由此得

$$h_{pq}^{(1)}(K) = \sum_{k=-K+q/2}^{K+q/2} \frac{1}{2k-1} - \sum_{k=-K+p/2}^{K+p/2} \frac{1}{2k-1}.$$

当 $|p|$，$|q|<K$ 且 $p<q$ 时

$$h_{pq}^{(1)}(K) = \sum_{k=-K+q/2}^{K+p/2} \frac{1}{2k-1} + \sum_{k=K+1+p/2}^{K+q/2} \frac{1}{2k-1}$$

$$- \sum_{k=-K+p/2}^{-K-1+q/2} \frac{1}{2k-1} - \sum_{k=-K+q/2}^{K+p/2} \frac{1}{2k-1}$$

$$= \sum_{k=K+1+p/2}^{K+p/2} \frac{1}{2k-1} - \sum_{k=-K+p/2}^{-K-1+q/2} \frac{1}{2k-1}.$$

从这里我们求得，当 $p<q$ 和 $|p|$，$|q|<K$ 时

$$|h_{pq}^{(1)}(K)| \leqslant \frac{|p-q|}{2K+1-|p|},$$

因而，当 $p<q$ 时

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{q+2k-1} - \frac{1}{p+2k-1}\right] = \lim_{K\to\infty} h_{pq}^{(1)}(K) = 0.$$

类似地可以证明当 $p>q$ 时，该和式也为零，并且和式

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{q+2k} - \frac{1}{p+2k}\right]$$

也为零，于是 $\bar{h}_{pq}=0$，从而

$$h_{pq} = -\frac{[1-(-1)^p][1-(-1)^q]}{pq}.$$

因此

$$H(\xi,\xi) = \pi^2 \sum_{p=1}^{\infty} \xi_p^2 - \sum_{p,q=1}^{\infty} \frac{[1-(-1)^p][1-(-1)^q]}{pq} \xi_p \xi_q$$

$$= \pi^2 \sum_{p=1}^{\infty} \xi_p^2 - 4 \sum_{p,q=1}^{\infty} \frac{\xi_{2p-1}\xi_{2q-1}}{(2p-1)(2q-1)}.$$

但是

$$\sum_{p,q=1}^{\infty}\frac{\xi_{2p-1}\xi_{2q-1}}{(2p-1)(2q-1)}=\left(\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\xi_{2p-1}}{2p-1}\right)^2\geqslant 0,$$

因而

$$H(\xi,\xi)\leqslant\pi^2\sum_{p=1}^{\infty}\xi_p^2.$$

于是由(13)式可得估计

$$|B(\xi,\eta)|=\left|\sum_{\substack{p,q=1\\p\neq q}}^{\infty}\frac{1-(-1)^{p+q}}{p-q}\xi_p\eta_q\right|$$

$$\leqslant\pi\left(\sum_{p=1}^{\infty}\xi_p^2\sum_{q=1}^{\infty}\eta_q^2\right)^{1/2}. \tag{14}$$

在证明不等式(11)之前,我们还要讨论一个二次型:

$$S(\xi,\xi)=\sum_{p,q=1}^{\infty}\frac{\xi_p\xi_q}{p+q}. \tag{15}$$

因为$\frac{1}{p+q}=\int_0^{\infty}e^{-(p+q)t}dt$, 所以

$$S(\xi,\xi)=\lim_{n\to\infty}\sum_{p,q=1}^{n}\frac{\xi_p\xi_q}{p+q}=\int_0^{\infty}\left(\sum_{p=1}^{\infty}\xi_pe^{-pt}\right)^2dt\geqslant 0,$$

即二次型$S(\xi,\xi)$非负,令(15)中的$\xi_p=\sqrt{p}\xi_p'$, 那末可以确信,二次型

$$T(\xi,\xi)=\sum_{p,q=1}^{\infty}t_{pq}\xi_p\xi_q,\ t_{pq}=\frac{\sqrt{pq}}{p+q},$$

同样是非负的. 设n为某自然数,令

$$T_n(\xi,\xi)=\sum_{p,q=1}^{n}t_{pq}\xi_p\xi_q,\ t_{pq}=\frac{\sqrt{pq}}{p+q}. \tag{16}$$

因为已证明二次型$T_n(\xi,\xi)$是非负的, 所以它的矩阵可以开方$T_n^{1/2}=U_n$. 设u_{pq}为矩阵U_n的元,则

$$t_{pq}=\sum_{r=1}^{n}u_{rp}u_{rq}. \tag{17}$$

考虑双线性型

$$A_n(\xi, \eta) = \sum_{\substack{p,q=1 \\ p \neq q}}^{n} a_{pq}\xi_p\eta_q,$$

它的系数由(10)式确定. 当 $n \to \infty$ 时这个双线性型变为我们感兴趣的(9)式. 从(10),(12),(16)和(17)推得

$$a_{pq} = b_{pq}t_{pq} = b_{pq}\sum_{r=1}^{n} u_{rp}u_{rq},$$

即

$$A_n(\xi, \eta) = \sum_{r=1}^{n}\sum_{\substack{p,q=1 \\ p \neq q}}^{n} b_{pq}(u_{rp}\xi_p)(u_{rq}\eta_q)$$

$$= \sum_{r=1}^{n} B_n(u_{rp}\xi_p, u_{rq}\eta_q), \tag{18}$$

其中 $B_n(\alpha_p, \beta_q) = \sum_{p,q=1}^{n} b_{pq}\alpha_p\beta_q$. 由于(14)双线性型 $B_n(\alpha_p, \beta_q)$ 的上界为 π, 因而

$$|B_n(u_{rp}\xi_p, u_{rq}\eta_q)|$$

$$\leqslant \pi\left[\sum_{p=1}^{n}(u_{rp}\xi_p)^2\sum_{p=1}^{n}(u_{rp}\eta_p)^2\right]^{1/2}$$

$$\leqslant \frac{\pi}{2}\sum_{p=1}^{n}(u_{rp})^2(\xi_p^2 + \eta_p^2).$$

为了估计(18)式的右端,利用这个不等式并注意到(17),则得

$$|A_n(\xi, \eta)| \leqslant \frac{\pi}{2}\sum_{p=1}^{n}\sum_{r=1}^{n}(u_{rp})^2(\xi_p^2 + \eta_p^2)$$

$$= \frac{\pi}{2}\sum_{p=1}^{n} t_{pp}(\xi_p^2 + \eta_p^2).$$

$$\leqslant \frac{\pi}{2}\max_{1 \leqslant p \leqslant n} t_{pp}\sum_{p=1}^{n}(\xi_p^2 + \eta_p^2)$$

但从(16)推出 $\max t_{pp} = 1/2$, 因而

$$|A_n(\xi, \eta)| \leqslant \frac{\pi}{4}\sum_{p=1}^{n}(\xi_p^2 + \eta_p^2).$$

设 $\sum_{p=1}^{n}\xi_p^2 = \sum_{p=1}^{n}\eta_p^2 = 1$, 则 $|A_n(\xi, \eta)| \leqslant \frac{\pi}{2}$. 令 $A_n(\xi, \eta)$ 中的

$$\xi_p = \xi'_p \Big/ \left(\sum_{p=1}^{n} \xi'^2_p\right), \quad \eta_p = \eta'_p \Big/ \left(\sum_{p=1}^{n} \eta'^2_p\right),$$

则得到下面不等式:

$$|A_n(\xi', \eta')| \leqslant \frac{\pi}{2}\left(\sum_{p=1}^{n} \xi'^2_p \sum_{q=1}^{n} \eta'^2_q\right)^{1/2}.$$

在这不等式中当 $n \to \infty$ 时,取极限,则得到不等式 (11),由此推得估计式(3) .

3）剩下的是要证明不等式(4). 设 $\tilde{w}(y)$ 是与 $\tilde{u}(y)$ 相同或与 $\tilde{v}(y)$ 相同的函数. 由定义 (8)

$$\|\tilde{w}(y_1, y_2)\|^2_{\overline{W}_2^{1/2}[0, l_1]} = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{w}_k^2(y_2)\frac{k\pi}{l_1}. \tag{19}$$

应用第五章§4 中的定理 2 容易证明

$$\tilde{w}_k^2 \leqslant \varepsilon_k \int_0^{l_2} \left(\frac{\partial \tilde{w}_k}{\partial y_2}\right)^2 dy_2 + \left(\frac{1}{\varepsilon_k} + \frac{1}{l_2}\right)\int_0^{l_2} \tilde{w}_k^2(y_2) dy_2.$$

将这估计式代入(19)右端并取 $\varepsilon_k \dfrac{k\pi}{l_1} = \varepsilon$, 得

$$\|\tilde{w}(y_1, y_2)\|^2_{\overline{W}_2^{1/2}[0, l_1]} \leqslant \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{l_2} \left(\frac{\partial \tilde{w}_k}{\partial y_2}\right)^2 dy_2 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{l_1}{l_2 k\pi}\right)\left(\frac{k\pi}{l_1}\right)^2 \int_0^{l_2} \tilde{w}_k^2(y_2) dy_2.$$

但

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{l_2}\left(\frac{\partial \tilde{w}_k}{\partial y_2}\right) dy_2 = \int_0^{l_1}\int_0^{l_2} \left(\frac{\partial \tilde{w}}{\partial y_2}\right)^2 dy_1 dy_2,$$

而

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{l_1}{l_2 k\pi}\right)\left(\frac{k\pi}{l_1}\right)^2 \int_0^{l_2} \tilde{w}_k^2(y_2) dy_2$$
$$\leqslant \left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{l_1}{\pi l_2}\right)\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k\pi}{l_1}\right)^2 \int_0^{l_2} \tilde{w}_k^2(y_2) dy_2$$
$$= \left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{l_1}{\pi l_2}\right)\int_0^{l_1}\int_0^{l_2} \left(\frac{\partial \tilde{w}}{\partial y_1}\right)^2 dy_1 dy_2,$$

从这里推得不等式(4),定理证毕.

图 书 索 引

第一章§1. 导致椭圆型方程的力学和物理学问题的其他例子或所讨论例子的更详细的阐述，可在书[8，12]中找到.

第一章§2. 关于椭圆型方程以及它的广义解的更详细资料可从书[5，10]中得到.

第二章§§1，2. 与这部份内容很相近并详细叙述一致差分格式理论的材料包含在书[11]中.

第二章§3. 里兹方法的详细论述可在书[7]中找到，构造差分格式的方法在书[2，6，9，11]中已有论述.

第三章. 泊松方程以及它的边值条件的差分逼近已在书[3，4，11]中讨论.在这些书中也论述了最大值原理.

第五章. 其他的嵌入定理以及别的网格算子的估计可在书[2，5，11]中找到.

第六章. 在差分格式的研究中能量不等式方法在书[2，5，11]中有很广泛的应用. 在书[9]中研究了变分差分格式.

参　考　文　献

[1] Вазов В., Форсайт дж., Разностные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных, М., ИЛ, 1963.(有中译本)

[2] Дьяконов Е. Г., Разностные методы решения краевых задач, Вып. I (стационарные задачи), М., Ротапринт ВЦ МГУ, 1971.

[3] Канторович Л. В., Крылов В. И., Приближенные методы высшего анализа, М., Физматгиз, 1962. (前四章有中译本)

[4] Коллатц Л., Численные методы решения дифференциальных уравнений, М., ИЛ, 1953.

[5] Ладыженская О. А., Краевые Задачи математической Физики, М., «Наука», 1973.

[6] Марчук Г. И., Методы Вычислительной Математики, Новосибирск, «Наука», 1973.

[7] Михлин С. Г., Вариационные методы математической Физики, М., «Наука», 1969.

[8] Мусхелишвили Н. И., Некоторые основные задачи математической Теории Упругости, М., «Наука», 1966.

[9] Оганесян Л. А., Ривкинд в, я., Руховец Л. А., Вариационно-разностные методы решения эллиптических уравнений, ч. 1 и2, в сб. «Дифференциальные уравнения и их применение», Вып. 5, Вильнюс, Пяргале, 1973; Вып. 8, Вильнюс, Пяргале, 1974.

[10] Петровский И. Г., Лекции об уравнениях с частными производными, М., Физматгиз, 1961. (有中译本)

[11] Самарский А. А., Введение в теорию разностных схем М., «Наука», 1971.

[12] Тихонов А. Н., Самарский А. А., Уравнения Математической физики, М., «Наука», 1972.